Förord

Detta häfte innehåller ett antal matematikproblem inom olika områden av den matematik som behandlas inom de olika kurserna på gymnasieskolan. Vi har, i de flesta fall, inte delat upp innehållet efter räknarens funktioner utan mer efter matematiska områden. Eleverna kan arbeta med alla avsnitt, utom de som behandlar kombinatorik/fördjupad sannolikhetslära och rörelse och derivator, i de inledande matematikkurserna på gymnasieskolan. Vi vill betona att vår tanke är att det som tas upp i detta häfte ska berika de matematikmoment som man sysslar med, inte ersätta. Tyvärr kan vi ett sådant här häfte inte ta upp alla de funktioner som finns inbyggda i räknaren. Intresserade kan finna utför-liga beskivningar i handboken till räknaren eller söka i den rikhaltiga flora av böcker och annat material som finns om grafritande räknare. Många av idéerna till detta häfte har sitt ursprung i ett motsvarande danskt material, författat av Knud Nissen. Se referenslistan.

Innehåll

Referenser:

Morgan/ Explorations, Statistics handbook for the TI-83. Texas Instruments 1997
Hoffman&Hoffman/Explorations, Time, value, money, applications on the TI-83. Texas Instruments 1997.
Nissen&Texas Instruments/ Eksempelsamling TI-83
Vretblad/Algebra och kombinatorik. Studentlitteratur 1995
TI:s hemsida:http://www.ti.com/calc/docs/graph.htm

Printed in Sweden by Gummessons Tryckerier AB

Innan du börjar

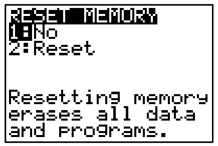
Det första du tänker på när du har en ny räknare i handen är naturligtvis - Hur sätter jag på den? Med-knappen naturligtvis. Hur stänger jag av den. Det var lite svårare. Om du tittar på räknaren så står det OFF med *gul* stil ovanför ...-knappen. Det betyder att det är en s.k. 2nd-funktion som du når om du först trycker på y-knappen uppe till vänster. Det fungerar alltså som [SHIFT]-tangenten på en dator. De “gröna“ funktionerna når du genom att först trycka på É-knappen.

Innan du börjar med att studera detta häfte bör du titta lite i handboken till TI-83. Till att börja med kan du studera sidorna 1.2 och 1.3 i Kapitel 1: Arbeta med TI-83. Studera även sidorna 2 och 3 i inlednings-kapitlet - Komma igång.
För att det du ser på skärmen ska överensstämma med de skärmbilder som finns i de följande avsnitten, gör du klokt i att rensa räknaren fullständigt. Här följer instruktionerna för detta:

Sätt på räknaren och tryck på y [MEM] (är placerat ovanför _). I den meny som kommer fram väljer du `5:Reset`. Det kan du göra på två sätt:

- tryck _
- Flytta markören till `5:Reset` med piltangenten Ü och tryck sedan Õ.

I nästa meny ska du välja `1:All memory`, varefter det kommer en varning om följden av att återställa räknarens minne. Du har här en chans att ångra dig. Tryck nu `Reset` och räknarens minne töms.



Trycker man nu Reset tömmer man räknaren.

1 Inmatning av uttryck

Ett *uttryck* är i detta sammanhang en sekvens eller följd av
tal t ex `7*5^2,`
variabler t ex `2A+B`
och funktioner (med tillhörande argument) t ex `log(200)`

Naturligtvis ska ett *uttryck* uppfylla några syntaktiska regler, och gör det icke det så få man ett felmeddelande - *syntax error.* Den syntax som man ska följa är nästan precis densamma som när du skriver matematik med papper och penna eller med datorn.

> Beräkna uttrycket
>
> $$-3{,}17+\frac{2{,}53^2-\sqrt{5{,}25}}{2{,}46}$$

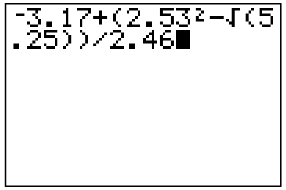
Först måste du tänka på att det minustecken som står framför 3,17 anger att det är ett negativt tal. På TI-83 skiljer man mellan ett minus för att ange ett negativt tal Ã och operatorn minus för subtraktion _.

Knappa nu in följande sekvens:

Ã 3.17 _ 2.53 ° _ y [_] 5.25 § § • 2.46

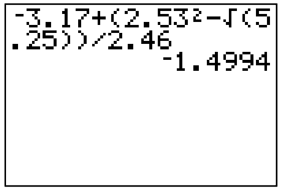
Om du upptäcker att du matat in fel någonstans kan du använda knapparna }, Ü, ~ och | för att förflytta markören till den plats där felet är. Sedan kan du rätta felet genom att helt enkelt skriva över. Du kan också ta bort det tecken där markören befinner sig genom att trycka på {. Du kan också sätta in (inpassa) ett eller flera tecken genom att tycka på y [INS].

Experimentera lite med dessa olika möjligheter. Om du vill veta närmare; se handboken s 1.11 i kapitel 1. Bilden nedan visar skärmen vid ett korrekt inmatat uttryck:



Lägg märke till att då du knappade in y [_], så skrev räknaren _ (. Det betyder att räknaren själv lägger till en vänsterparentes omkring det tal som den ska dra roten ur.

För att få uttrycket beräknat trycker du på Õ. Därefter ser din skärm ut så här:



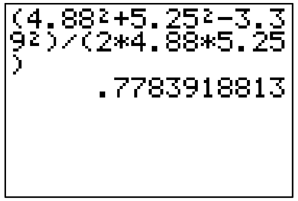
- Om du upptäcker ett fel i inmatningen av uttrycket efter det att du tryckt på Õ kan du få tillbaka det inmatade uttrycket för redigering igen genom att trycka på y [ENTRY].

- Om du trycker på fel knappar och t ex hamnar i en annan meny, kan du alltid komma tillbaka till grundskärmen genom att trycka knappsekvensen y [QUIT].

Beräkna uttrycket

$$\frac{4,88^2+5,25^2-3,99^2}{2\cdot 4,88\cdot 5,25}$$

Skriv nu in så som skärmen nedan visar och tryck sedan på Õ.



Du förstår säkert att det är nödvändigt med parenteser omkring täljaren, men är det lika nödvändigt med parenteser omkring nämnaren. Tänk efter och pröva sedan. Du vet nu att du - om du redan utfört beräk-ningen – kan redigera sista inmatningen genom att trycka på y [ENTRY].

För att förstå i vilken ordning räknaren gör beräkningar av komplicerade uttryck, läs i Handboken på sid 1.26. Här är en kort sammanfattning.
Uttryck inom parenteser beräknas först. Inom parentesen gäller den vanliga beräkningsordningen. I exemplet på förra sidan beräknas täljaren först och inom parentesen i täljaren sker först beräkning av potenserna innan additionen och subtraktionen.
Om det finns en parentes omkring nämnaren, så beräknas den nu, och resultatet av beräkningen av täljaren (`39.88489`) divideras med resultatet av beräkningen av nämnaren (`51.24`).
Om vi tar bort parentesen omkring nämnaren har vi följande situation:
`39.8848/2*4.88*5.25`
Dom två räkneoperationerna division och multiplikation som ingår, har bägge prioritet 5 (se Handboken s 1.26), och beräkningsföljden kommer därför att vara i läsriktningen från vänster till höger. Vad som sker är då följande:
Först divideras `39.8848` med `2`, och resultatet `19.9424` multipliceras med `4.88` och det resultat man får då multipliceras med `5.25`. Slutresultatet blir `510.944288`. Helt fel alltså.

2 Bråkräkning

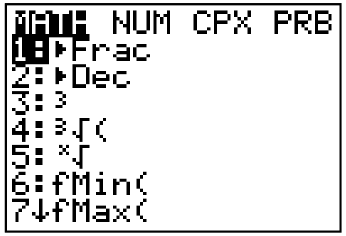
Förenkla uttrycket $\left(\frac{5}{9}-\frac{3}{7}\right)\cdot\frac{7}{17}$ så långt som möjligt.

Vi skriver in uttrycket i räknaren och beräknar resultatet:

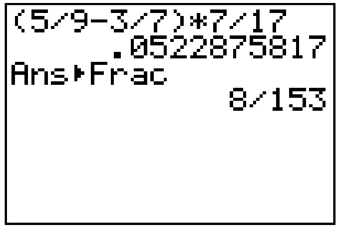
```
(5/9-3/7)*7/17
     .0522875817
```

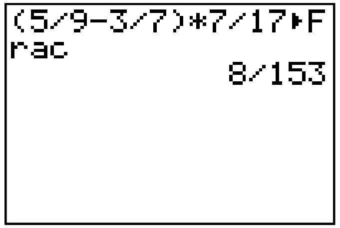
Nu finns det en funktion (`_ Frac`)hos räknaren som omvandlar decimaltal till bråk. Räknaren kan göra denna beräkning om den finner ett enkelt bråk som stämmer överens med decimaltalet. Det finns vissa begränsningar. Du kan läsa mer i Handboken.

Kommandot _ Frac finner du i ç-menyn. Om du trycker på denna knapp kommer följande meny fram:



Tryck nu på Õ eller 1 och räknaren svarar då: Ans _ Frac, som kan tolkas på följande sätt: det sist avgivna svaret (resultatet av en beräkning), i detta fall 0.052875817, ska nu omformas till ett bråk. Tyck på Õ och nu sker beräkningen. Se bilden till vänster.
Du kan slippa beräkningen av decimaltalet genom att direkt skriva som bilden till höger visar.





3 Last answer

När beräkning av ett uttryck utförs genom att du tycker på Õ, sparas resultatet i ett speciellt register som kallas Ans. Efter varje beräkning uppdateras detta register så att det alltid rymmer resultatet av den sista beräkningen – *Last Answer*.
Om du t ex efter en utförd beräkning trycker på _ så svarar räknaren

```
Ans+
```

och det du nu skriver in adderas till Ans. Motsvarande sker om du istället trycker på _, Ø eller •. Om du t ex tycker på °, svarar räknaren Ans^2 och slutligen, om du trycker kommandot _ Frac så svarar räknaren Ans _ Frac. Om du vill använda det värde som ligger lagrat i registret Ans i någon ny beräkning så trycker du y [ANS].

Du har kanske redan märkt en sak som har att göra med kommandot Õ. Pröva t ex att stänga av och sedan på räknaren. Rensa skärmen genom att trycka på è. Tryck sedan Õ upprepade gånger utan att mata in något. Då utförs den sista beräkning som gjordes innan räknaren stängdes av.

```
                8/153
                8/153
                8/153
                8/153
                8/153
                8/153
```

Vad är det med det då? Jo, denna egenskap kan utnyttjas vid upprepade beräkningar.

> Ett kapital på 500 kr insätts på ett konto som ger 3 % årlig ränta. Beskriv hur kapitalet utvecklas år för år.

1) Först matar vi in 500 och trycker på Õ.
2) Sedan trycker vi Ø 1.03 och tycker på Õ igen.
3) Vi fortsätter att trycka på Õ.

Resultatet ser du på skärmbilden nedan:

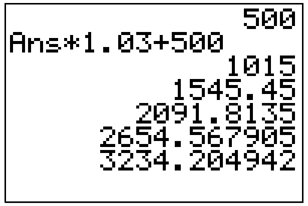
```
500
                 500
Ans*1.03
                 515
              530.45
            546.3635
          562.754405
```

Vad som har hänt är att instruktionen "sist beräknade värdet multi-pliceras med 1,03" utförs gång på gång. Det sist beräknade värdet uppdateras varje gång vi trycker på Õ.

Efter fyra år har således kapitalet vuxit till 562,75 kr. Vi ska se på några ytterligare exempel eftersom Ans-funktionen är mycket användbar.

500 kr sätts in på en konto i början av varje år. Räntan är 3 %. Visa hur det samlade kapitalet utvecklas.

1) Vi börjar med att mata in 500 och trycka på Õ.
2) Sedan trycker vi Ø 1.03 + 500 och avslutar med Õ.
3) Vi fortsätter att trycka på Õ.

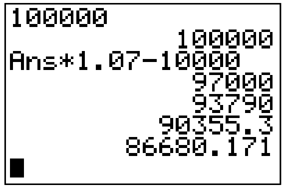


Resultatet syns på skärmbilden ovan. Tabellen ger det samlade kapitalet i början av varje år med början efter 1 år.

På samma sätt kan man göra om man t ex avbetalar ett lån.

Du lånar 100 000 kr och betalar varje årsskifte av lånet med 10 000 kr inkl. ränta. Beskriv hur din skuld minskar år från år. Låneräntan är 7 %.

Vi gör precis som förut. Det viktiga uttrycket här är Ans∗1.07–10000. Resultatet syns på skärmen nedan. Efter 4 år är skulden 86 680 kr. Om vi fortsätter att trycka på Õ få vi trycka på Õ sammanlagt 18 gånger innan skulden är mindre än 10 000 kr. Det tar alltså ca 17 år att betala av detta lån.



4 Variabler och formler

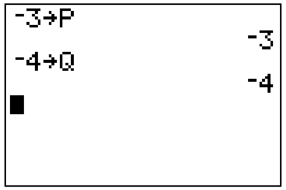
Bestäm rötterna till andragradsekvationen $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Andragradsekvationen $x^2 + px + q = 0$ har lösningarna

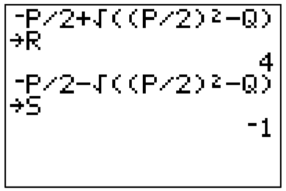
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

I exemplet ovan är då $p = -3$ och $q = -4$.

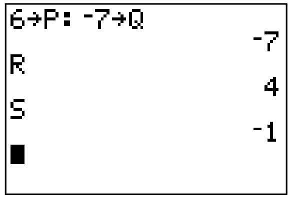
På TI-83 kan du lagra talvärden i variabler som betecknas A, B, ... Z. Titta på räknarens “gröna“ funktioner, som du når genom att först trycka på É. Vi visar nu hur man lagrar värdena –3 och – 4 i variablerna P och Q. För att lagra något trycker du på ø, så knappsekvensen för att lagra –3 i variabeln P blir då Ã ¬ ø É [P]. Se skärmbilden nedan.



För att beräkna rötterna till andragradsekvationen matar du sedan in formlerna för rötterna, lagrar värdena i en ny variabel och trycker på Õ. Du behöver naturligtvis inte skriva formeln två gånger. Tryck y [ENTRY] och byt plustecknet mot ett minustecken. Se skärmbilden nedan. Rötterna R och S är $x = 4$ och $x = -1$.



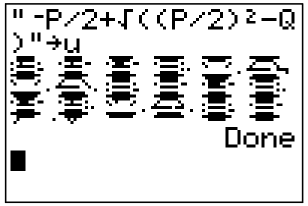
Vi ändrar nu värdena P och Q till 6 resp –7 för att lösa ekvationen $x^2 + 6x - 7 = 0$.

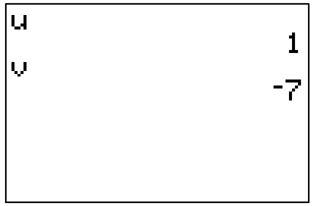


Vi ser att värdena för R och S inte ändras. Detta visar att det bara är *talvärden* som kan lagras i en variabel.

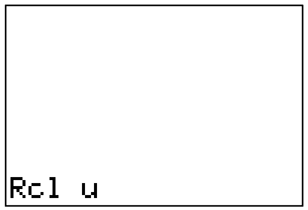
För att åstadkomma en uppdatering av variblernas värden ska vi titta lite på bokstäverna u, v och w, som finns ovanför knapparna ¨, _, och Æ. Dessa bokstäver kan användas till att “gömma“ formler.

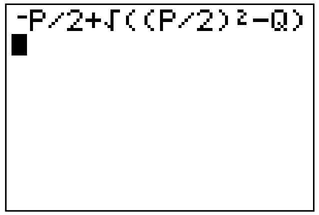
Uttrycken för rötterna till andragradsekvationen kan lagras i u och v. Glöm inte citationstecken omkring uttrycken. Se skärmbilden till vänster nedan.
Därefter kan vi skriva u och v, trycka på Õ och få rötterna beräknade. Se bilden nedan till höger.





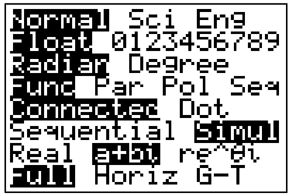
För att se vilka formler som ligger “gömda“ i u och v gör vi på följande sätt: tryck y [RCL] y [u]. RCL står för “kalla fram“. Se skärmbilden nedan till vänster. Tryck därefter på Õ. Då kommer formeln fram på skärmen. Se skärmbilden till höger.





5 Exponentiell notation

Om resultatet av en beräkning överstiger 10 siffror, ger räknaren resultatet i exponentiell form. Detta gäller om du har “normal-inställningen“. Se skärmbilden nedan till vänster.



Du kan redan från början ställa in räknaren till att konsekvent ge resultat i exponentiell form genom att välja “Scientific notation“ (Sci) i den meny du når genom att trycka z. Se skärmbilden ovan till höger.

Flytta markören till alternativet `Sci` på översta raden och tryck sedan på Õ. Räkna t ex ut `10^9.5` igen.

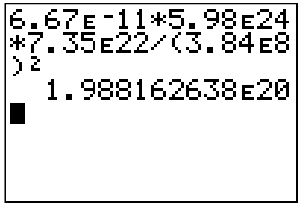
Om du vill skriva in tal i exponentiell form (t ex $6{,}02 \cdot 10^{23}$) skriver du så här (siffror visas här inte som tangenter): 6.02 y [EE] 10^23.

Beräkna dragningskraften i N mellan jorden och månen enligt formeln

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}, jordens massa $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, månens massa $m = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg och avståndet mellan jorden och månen, r, är $3{,}84 \cdot 10^8$ m.

Vi matar nu in vårt uttryck enligt formeln. Dragningskraften blir ca $1{,}99 \cdot 10^{20}$ N.

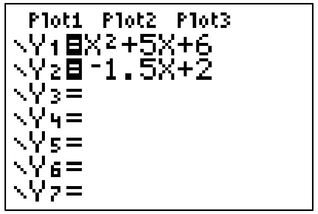


6 Grafritning

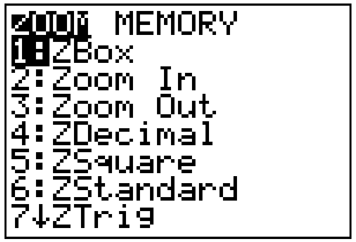
Rita grafen för den linjära funktionen $f(x) = -1,5x + 2$ och andragradsfunktionen $g(x) = x^2 + 5x + 6$. Bestäm skärningspunkterna mellan linjen och andragradskurvan.

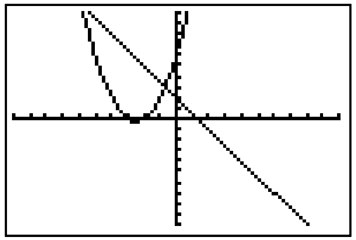
Genom att trycka o får du fram en editor för inmatning av funktioner. I editorn kan du flytta markören år olika håll med knapparna }, Ü, ~ och |. Om det finns någon funktion du vill ta bort ställer du markören på den rad där funktionen ska bort, därefter trycker du på è.

För att mata in variabeln *x* i dina funktioner tycker du på Ñ.



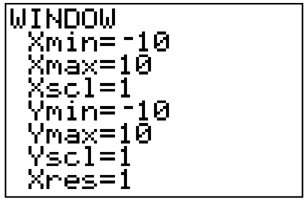
När du är klar med inmatningen ska du ställa in det fönster, *window*, du vill ha för graferna. Det finns ett stort antal verktyg för grafritning på TI-83, men en bra början brukar vara att ställa in ett standardfönster. Det gör vi genom att trycka på q. Då få vi menyn nedan till vänster. Välj alternativ `6:ZStandard`, antingen genom att trycka _ eller genom att flytta markören ned till alternativ 6 och sedan trycka Õ. Nu kommer graferna fram på skärmen. Se bilden nedan till höger.



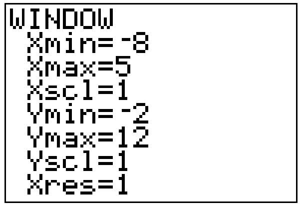


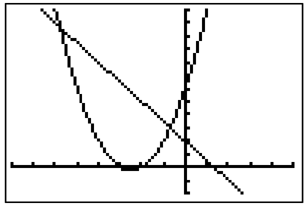
Vi ser bara en skärningspunkt mellan kurvan och linjen så därför vill vi förändra fönstret.

Vi trycker på p. Se bilden nedan.

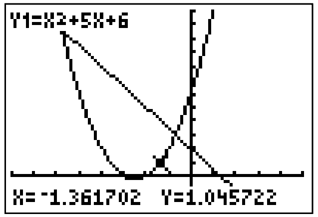


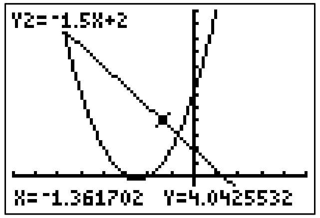
Fönstrets standardinställning vill vi nu förändra. Titta på graferna en gång till. För att se den andra skärningspunkten måste vi öka Ymax något. Dessutom behöver vi inte se så mycket av området under *x*-axeln, dvs *y*-värden < 0. Vad sägs om följande inställning:





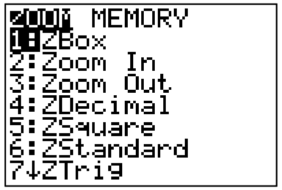
Nu ser man kurvan, linjen och skärningspunkterna bra. Med en speciell markör kan man grafiskt läsa av skärningspunkterna. Tryck på r. Nu kan man med hjälp av piltangenterna | och ~ flytta markören längs kurvan. Trycker man nu på någon av piltangenterna } och Ü flyttar du markören till linjen istället. Ekvationen för den aktuella funktionen står längst upp till vänster.

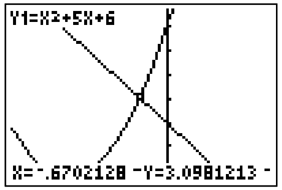




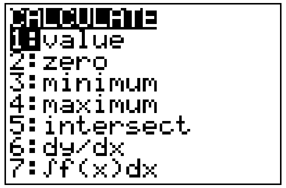
Nu flyttar vi markören nära den högra skärningspunkten och avläser koordinaterna längst ner på skärmen. Det kan vara lite svårt att göra en noggrann avläsning. För att komma närmare skärningspunkten ska vi nu zooma in mot området närmare skärningspunkten.

Tryck på q. Då visas ett antal verktyg. Se nedan. Vi ska inte visa alla dessa. Du kan läsa om detta på sid 3.21-3.25 i Handboken.
Tryck nu på ¡. Nu visas samma graf som ovan en gång till och du har möjlighet att med markören ställa in den punkt som ska vara mittpunkt i det nya fönstret. Vi kan t ex välja den högra skärningspunkten. När vi gjort det trycker vi på Õ. Nu förstoras området kring skärnings-punkten. Se skärmbilden till höger nedan.

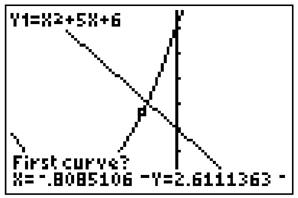


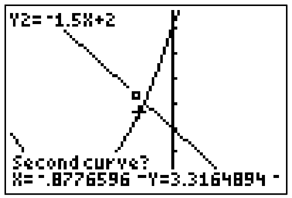


Nu kan vi med markören krypa närmare skärningspunkten. Så där kan man hålla på. Det kan bli lite omständigt och det tar lite tid. Nu finns det på räknaren ett speciellt verktyg, `intersect`, som beräknar skärningspunkter mellan kurvor.
Tryck y [CALC]. Då kommer en meny fram som innehåller olika verktyg för “calculus“. Se vänstra bilden nedan.

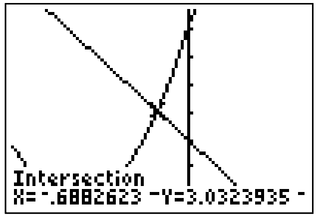


Välj nu alternativ 5 genom att tycka _. Då få du en fråga vilken som är din första kurva. Räknaren föreslår den funktion som “ligger i “ i Y1. Tryck sedan på Õ. Sedan frågas efter den andra kurvan. Räknaren föreslår den funktion som “ligger i“ Y2. Därefter får du göra en gissning var skärningspunkten ligger. Använd piltangenterna.

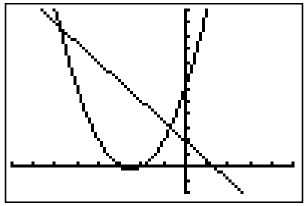


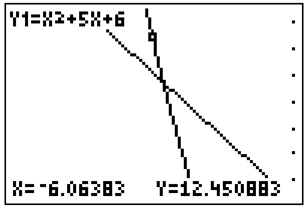


Nu trycker du på Õ igen. Nu beräknas skärningspunkten. Se bilden nedan.

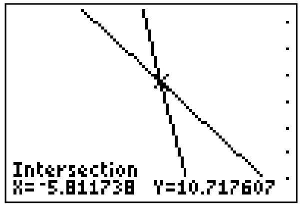


För att beräkna den andra skärningspunkten måste vi få med den skärningspunkten på skärmen. Vi går tillbaka till den ursprungliga skärmen och zoomar in mot den andra skärningspunkten. Det kanske kan se ut som på bilden nedan till höger.





Gör nu på samma sätt som förut. Om du gör rätt får du detta resultat.



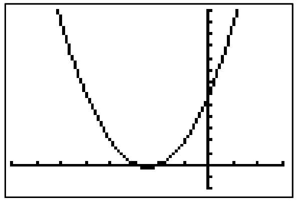
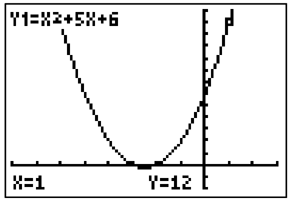
Skärningspunktena är (–0,688, 3,03) resp (–5,81, 10,7).

7 Funktionsvärden, nollställen och extremvärden

Beräkna funktionsvärdena *f*(1) och *f*(–1), nollställen och minimipunkt för andragradskurvan i föregående exempel.

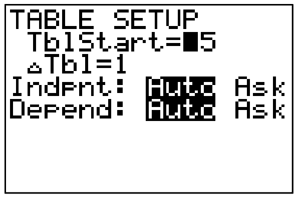
För att kunna se funktionsvärdena, nollställena och minimipunkten i grafen ska vi först ställa om vårt fönster något.

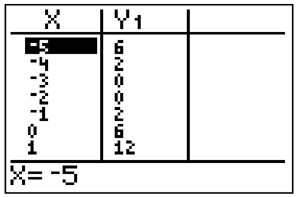
Se skärmbilden nedan till vänster. Genom att trycka på r kan vi följa kurvan och se *x*- och *y*-värden längst ner på skärmen. Man kan få funktionsvärdet till vilket *x*-värde som helst genom att direkt skriva in t ex 1 och trycka på Õ. Då får man y-värdet uträknat direkt. Se bilden till höger nedan. På samma sätt gör man för *x* = –1 och funktionsvärdet blir då 2. Pröva själv.

Det finns andra sätt att direkt se funktionsvärden för olika *x*-värden. Vi ska skaffa oss en *värdetabell*. Först ska vi göra in inställning av hur tabellen ska presenteras.

Tryck först på y [TBLSET]. Då kommer en meny fram. Se bilden nedan till vänster. I menyn ska vi ställa in var tabellen ska börja och hur stor differensen ska vara mellan *x-värderna*. Fyll i som bilden visar.
Därefter trycker du på y [TABLE]. Då får man en tabell.
Se bilden nedan till höger.



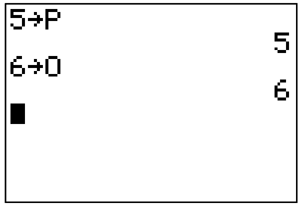


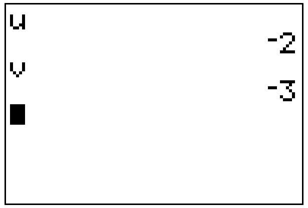
Nu kan vi direkt se funktionsvärdena för *x* = – 1 och *x* = 1.

Det finns faktiskt några sätt till att beräkna funktionsvärden. Vi tar inte upp dem här. De beskrivs närmare på s 3.6 och s 3.26 i Handboken.

Nu ska vi beräkna nollställena eller ekvationens rötter. Tidigare har vi algebraiskt och med hjälp av räknaren gjort detta. Se sid 8. Vi lagrade först koefficienterna p och q (om andragradsekvationen skrivs $x^2 + px + q = 0$) i variablerna P och Q och lösningarna i variablerna u och v. Låt oss se igen.

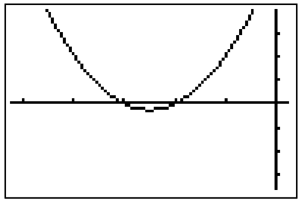
Koefficienterna är nu 5 och 6. Se vänstra bilden nedan. Därefter kan vi “plocka fram“ lösningarna. De ligger i variablerna u och v. I högra bilden ser vi lösningarna.

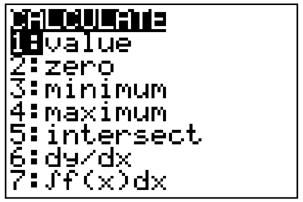




En andragradsekvation kan vi alltid algebraiskt hitta lösningarna till. Har man en ekvation av högre grad kan det vara svårare. Då måste man ofta ta till en numerisk metod.

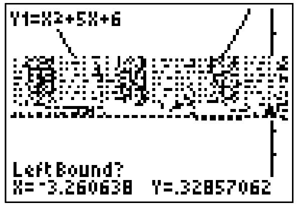
Nu visar vi också den inbyggda numeriska metod som finns på räknaren. Först förstorar vi området kring nollställena med `Zoom In`. Se vänstra bilden nedan.

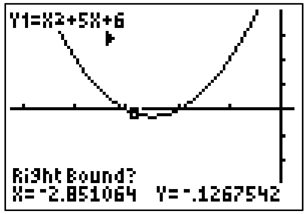




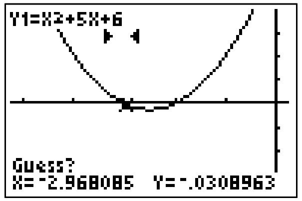
Nu trycker vi y [CALC] igen. Då får vi åter fram menyn med olika “calculus“-verktyg. Se högra bilden ovan.

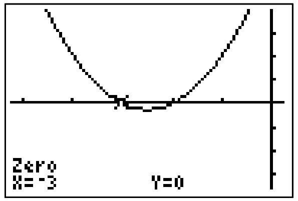
Välj alternativ `2:zero` genom att trycka på ¡. Först får vi en fråga om att ställa in den vänstra gränsen i det intervall som ska genomsökas. Vi använder piltangenterna | och ~ och trycker sedan på Õ. Då får vi en fråga om att ställa in den högra gränsen. Vi gör likadant igen och när detta är klart trycker du ånyo på Õ.



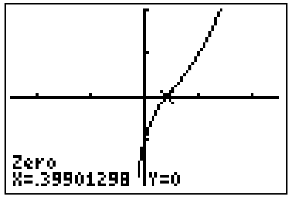


Nu får man en möjlighet att själv gissa var nollstället finns. Det kan ju eventuellt finnas flera nollställen i det valda intervallet. Använd | och ~ igen. Tryck därefter på Õ. På räknaren kommer snabbt ett numeriskt svar på ett nollställe i det valda intervallet.

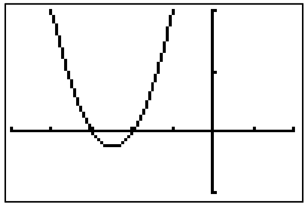




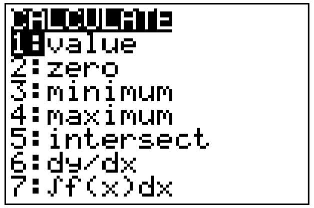
På samma sätt kan det andra nollstället hittas. Nu var det här en ganska enkel andragradsfunktion men man kan ju tänka sig en betydligt “svårare“ funktion. Tänk dig t ex att du ska lösa ekvationen $x^2 - 10^{-2x} = 0$. Räknaren ger den numeriska lösningen x _ 0,399.



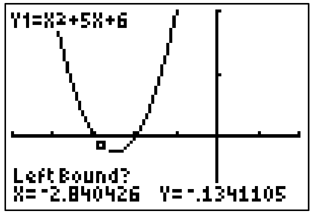
Nu ska vi beräkna funktionens minimipunkt. Vi “plockar fram“ en bra graf av funktionen på skärmen igen.

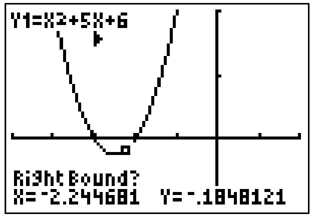


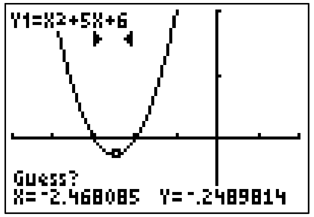
Tryck på y [CALC] igen.

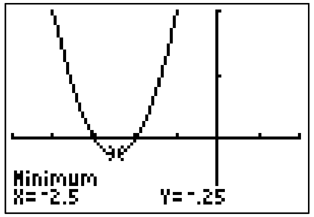


Välj nu alternativ `3:minimum` och tryck sedan Õ. Nu får vi frågor om att ställa in vänster gräns, höger gräns och ange en gissning. Vi använder | och ~ för att ställa in gränser och ange en gissning. Efter varje gång vi angett ett svar trycker vi på Õ.

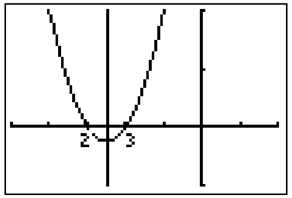








Vi får svaret $x = –2,5$ och $y = –0,25$. Vi vet att alla andragradskurvor är *symmetriska* kring en lodrät linje genom maximi- eller minimipunkten. Tidigare bestämde vi ju funktionens nollställen till $x = –3$ och $x = –2$. Av symmetriskäl vet man då att minimipunkten har x-koordinaten –2,5.



Ett *algebraisk* metod är att skriva om funktionen

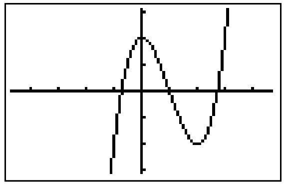
$$y = x^2 + 5x + 6 \text{ som } y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 0{,}25.$$

Vi har använt s.k. *kvadratkomplettering*. Pröva att utveckla kvadraten och kontrollera att det stämmer.

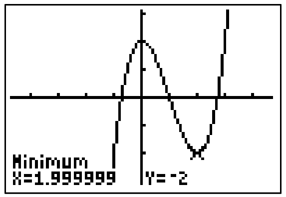
Om vi tittar på uttrycket ovan ser vi att y antar sitt minsta värde när parentesen är lika med noll. En kvadrats värde kan ju inte vara mindre än noll. Detta inträffar när $x = -2{,}5$.

Pröva nu att mata in båda uttrycken ovan i räknarens editor för funktionsinmatning. Kurvorna överlappar varandra på skärmen.

Nu matar vi istället in funktionen $y = x^3 - 3x^2 + 2.$ Vi ställer in grafffönstret genom att trycka på q och välja alternativ `6:ZStandard`. För att få en graf som bättre "fyller ut" fönstret tycker vi på q en gång till och väljer alternativ `4:Zdecimal`. Se bilden nedan. Pröva effekten av denna inställning med r.

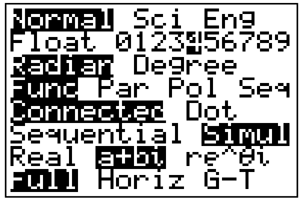


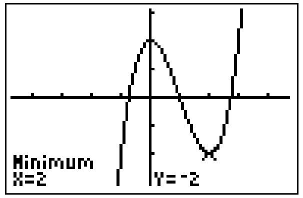
Vi bestämmer nu minimipunkten med samma metod som i det tidigare exemplet. Resultatet syns i bilden nedan.



Med exakta metoder kan man visa att ett minimum antas för $x = 2$. Räknaren kan inte skilja på funktionsvärdet för $x = 1{,}999999$ och $x = 2$.

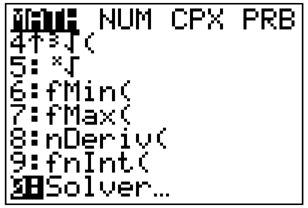
Ett bra sätt kan vara att begränsa antalet utskrivna decimaler. Tryck på z och flytta markören med piltangenterna till t ex 4 på andra raden.



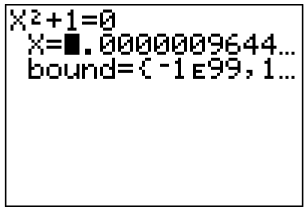


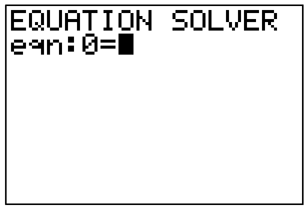
8 Ekvationslösaren

TI-83 har en inbyggd kraftfull ekvationslösare. Du kan hitta den längst ner på Math-menyn. Tryck ç följt av 0 eller gå ner till alternativ noll med hjälp av Ü och tryck sedan Õ.



Då kommer menyn för ekvationslösaren fram. Se bilden till vänster. Om det står något där, tryck på } följt av è. Då rensas "gamla" ekvationer





På s 11 gick vi igenom en metod att beräkna skärningspunkterna mellan den linjära funktionen

$f(x) = -1,5x + 2$ och andragradskurvan

Att hitta skärningspunkterna är detsamma som att finna *x*-värden för vilka

$f(x) = g(x)$, dvs $-1,5x + 2 = x^2 + 5x + 6.$

$-1,5x + 2 = x^2 + 5x + 6$ kan omformas till $0 = x^2 + 5x + 6 + 1,5x - 2$ genom att vänsterledets termer flyttas över till högra ledet.

Nu har vi en andragradsekvation vi ska lösa. Ekvationen kan först förenklas till

$$0 = x^2 + 6,5x + 4$$

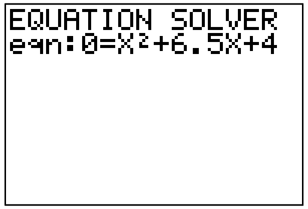
Det är denna ekvation vi ska mata in i ekvationslösarens editor.

Uppgiften vi ska lösa ser alltså ut så här:

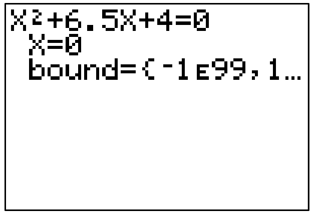
Bestäm lösningarna till andragradsekvationen

$$x^2 + 6,5x + 4 = 0.$$

Vi skriver nu in denna ekvation i editorn :

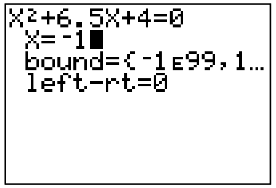


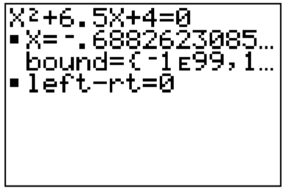
Sedan tycker vi på Õ, Då ser skärmen ut så här:



Nu ska vi mata in ett “startvärde“ för *x*. Vi plockar fram graferna av funktionerna igen:

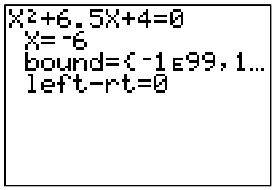
Utan att gå tillbaka kan vi avläsa att skärningspunkterna - och därmed lösningarna till ekvationen ovan - är ungefär *x* _ – 6 och *x* _ –1.
Vi pröva därför med att först mata in *x* = –1 som startvärde. Utan att flytta markören trycker vi nu på É [SOLVE]. Se bilden till höger.

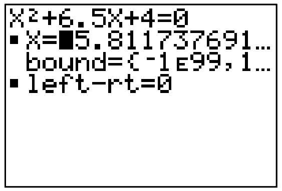




Några kommentarer: bound på tredje raden betyder det intervall där räknarens program ska leta efter lösningar. Om du bläddrar med markören står det (–1E99, 1E99) som betyder att räknaren söker efter lösningar i detta “oändliga“ intervall. Intervallet representerar det minsta resp största tal som räknaren kan representera.

Vi ser att vi får en lösning som övensstämmer med den lösning vi fick tidigare. På samma sätt kan man hitta den andra lösningen till ekvationen. Vi matar in – 6 som startvärde för *x*:





Vi ser att vi snabbt får den andra roten till ekvationen.

Vi fortsätter med ett problem om pengar:

Ett belopp har på 24 år vuxit till 4998,90 kr på ett konto. Ränta har hela tiden varit 5 % per år. Hur stort var det belopp som insattes från början på kontot.

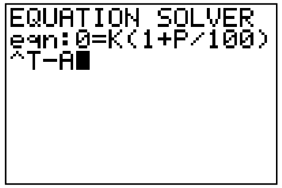
Vi känner säkert alla till att värdet *A* av kapitalet *K* med *p* % ränta på ränta efter *t* år kan tecknas med formeln

$$A = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$$

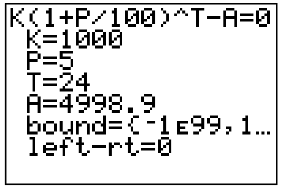
Vi skriver om vår ekvation som

$$0 = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^t - A$$

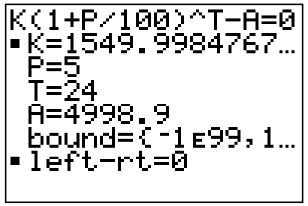
Nu kan vi mata in denna ekvation i ekvationslösarens editor.



Vi trycker sedan på Õ. Då kommer följande skärm fram:



Vi fyller i det vi vet: P = 5 (räntan), T = 24 (antalet år), A = 4998.90 (kapitalet efter 24 år). För K matar vi in 1 000 som startvärde.
Nu placerar vi markören vid K. Därefter trycker vi på É [SOLVE]:
Resultatet låter inte vänta på sig:



Svaret blir alltså ca 1550 kr.

Den här uppgiften kan man naturligtvis lösa med att skriva om formeln genom att lösa ut *K* och sätta in värden för *A*, *p* och *t*.

$$K = \frac{A}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^t}$$

```
4998.9/(1+5/100)
^24
        1549.9985
```

Ekvationslösaren är dock smidig. Man kan snabbt lösa ett annat problem som handlar om samma sak. Nu kanske vi vill veta den genomsnittliga årliga räntan istället.

> 12 000 kr växte på ett konto under 8 år till 21 650 kr. Hur stor var den genomsnittliga årliga räntesatsen?

Ekvationen är densamma. Vi fyller i det vi känner till och gissar att P är 6. Sedan placerar vi markören vid P och trycker É [SOLVE]. Nedan ser du resultatet.

```
K(1+P/100)^T-A=0
 K=12000
▪P=7.6550933391…
 T=8
 A=21650
 bound={-1ᴇ99,1…
▪left-rt=0
```

Även denna uppgift kan man naturligtvis lösa med att skriva om formeln genom att lösa ut *p* och sätta in värdena för *K*, *A* och *t*. Vi utgår från formeln

$$K = \frac{A}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^t}$$ som också kan skrivas $$\left(1+\frac{p}{100}\right)^t = \frac{A}{K}$$

Vi upphöjer båda leden med $\dfrac{1}{t}$

$$\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t}\right)^{\frac{1}{t}}=\left(\frac{A}{K}\right)^{\frac{1}{t}} \quad \text{som kan förenklas till} \quad \left(1+\frac{p}{100}\right)=\left(\frac{A}{K}\right)^{\frac{1}{t}}$$

Vi kan nu lösa ut p ur det sista uttrycket:

$$p=\left(\left(\frac{A}{K}\right)^{\frac{1}{t}}-1\right)\cdot 100$$

Insättning av värden på A, K och t ger värdet på räntesatsen.

```
((21650/12000)^(
1/8)-1)*100
          7.6551
```

De två tidigare uppgifterna kunde vi också lösa med algebraiska metoder.

Nu ska vi se på ett problem där man inte kan komma år ett resultat med algebraiska metoder. Vi tittar tillbaka på s 7. Där såg problemet ut så här:

> 500 kr sätts in på en konto i början av varje år. Räntan är 3 %. Visa hur det samlade kapitalet utvecklas.

Vi visade tidigare hur det samlade kapitalet utvecklades år från år med räknarens [Ans]-funktion. Se bildskärmen nedan.

```
             500
Ans*1.03+500
            1015
         1545.45
       2091.8135
     2654.567905
     3234.204942
```

Om K kr sätts in i början av t på varandra följande år till p % ränta, kan det samlade kapitalet A beräknas med formeln

$$A = K \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t - 1}{\frac{p}{100}}$$

I denna formel kan man lösa ut och beräkna t och K för olika värden på de andra variablerna.

Att lösa ut p kan man däremot inte göra. Se på problemet nedan.

Vi har investerat pengar i en fond. Till fonden har inbetalts 5000 kr i början av varje år. Efter 5 år (6 inbetalningar) är avkastningen på det inbetalade kapitalet 2342 kr. Hur stor årlig ränta motsvarar det?

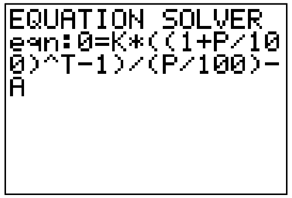
Vi har totalt investerat 30 000 kr. Det samlade kapitalet efter 5 år är då 32 342 kr.

Formeln ovan kan vi alltså inte använda då vi inte direkt kan lösa ut p. Vi går till ekvationslösaren:

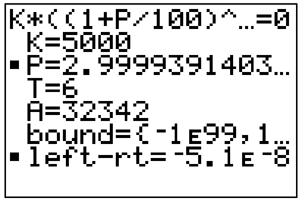
Formeln skriver vi då om som

$$0 = K \cdot \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t - 1}{\frac{p}{100}} - A$$

I ekvationslösaren ser det ut så här:



Nu tycker vi på Õ. Nu matar vi in de värden vi känner till. Vi gissar ett värde på P, t ex 5 %. Vi placerar markören på raden för P och trycker É [SOLVE]. Räntesatsen beräknas direkt. Se skärmbilden på nästa sida.



Resultatet blir nästan precis 3 %. Om vi tittar tillbaka på problemet från s 7, ser vi att det i princip är samma problem. Istället för 500 kr har vi här 5 000 kr.

På sista raden i ekvationslösarens fönster står det
`left – rt = -5.1E–8`.

Detta värde (0,000 000 051) är skillnaden mellan vänster och höger led i ekvationen. Av värdet kan vi se att vänster och höger led är lika för de första 7 decimalerna.

På samma sätt kan man lösa problem som handlar om att betala en skuld. Den formel man ska använda då är

$$A = K \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-t}}{\frac{p}{100}}$$

9 Linjära modeller och diagramritning

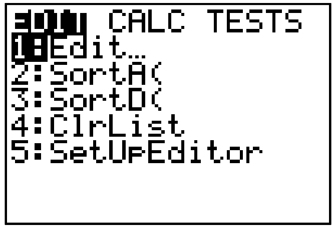
Tabellen nedan visar det uppmätta trycket vid olika djup under havsytan.

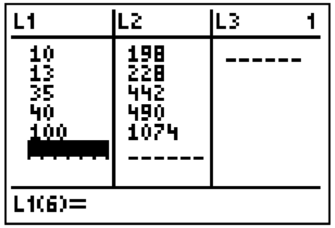
Djup (m)	10	13	35	40	100
Tryck (kPa)	198	228	442	490	1074

Undersök om trycket är en linjär funktion av djupet.
Ta reda på trycket på 150 m djup och vid havsytan.
Till sista ska du ta reda på vid vilket djup trycket är 300 kPa.

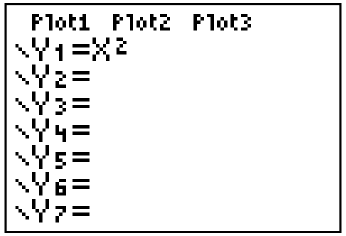
Nu ska vi för första gången stifta bekantskap med en editor för inmatning av data. Tryck nu på Ö.

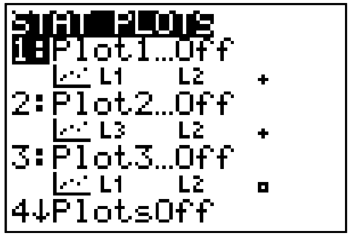
I den meny som nu kommer fram, väljer du alternativ `1Edit`. Då kommer editorn för inmatning av data fram. Där finns ett antal kolumner (`L1` till `L6`). De brukar kallas för *listor*. Det påminner ganska mycket om kalkylarket i kalkylprogram. Inmatningen av data sker längst ner på skärmen. När du har skrivit in data för en cell (t ex `L1(1)`) trycker du på Õ. Markören hoppar då till nästa rad. På skärmbilden nedan har vi matat in data från uppgiftens tabell.





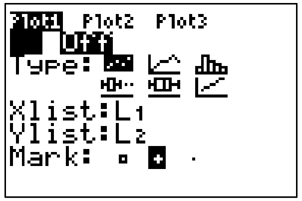
Nu kan det vara intressant att plotta dessa data. Se först till att editorn för funktioner o är tom. Du tar bort inmatade funktioner genom att trycka på è. Alternativt kan du placera markören ovanför likhetstecknet och trycka Õ. Då slocknar den mörka ruta som står över likhetstecknet. Se bilden nedan till vänster. Funktionen är då avmarkerad och ngn funktion kommer inte att ritas upp i graffönstret. Tryck sedan y [STAT PLOT]. Då kommer menyn nedan till höger fram.





Här finns 3 olika plot-menyer att tillgå. Vi ska nu titta lite närmare på vad man kan göra genom att göra olika inställningar i denna meny. Placera markören på `1:Plot1..Off` och tryck på Õ.

Nu kommer en meny fram för inställningar inför diagramritning. Se bilden till vänster nedan. Tryck nu först på `On`.



Under `Type`: ser du ett antal olika diagram som räknaren kan rita. Bilderna är små men du kan säkert i flera fall gissa vad det är:

" *Spridningsdiagram*. Visar i ett koordinatsystem data från två olika datalistor.

“ *Linjediagram*. Samma som förra diagrammet men datapunkterna är sammanbundna med linjer.

“ *Histogram*

÷ *Lådagram* av typ 1

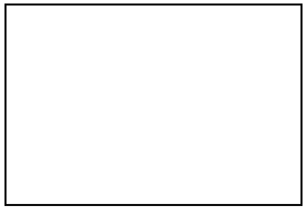
‘ *Lådagram* av typ 2

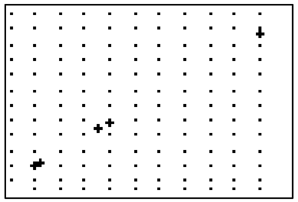
‘ Ett speciellt diagram som visar hur väl normalfördelade data från en lista är.

Vi ska nu rita ett spridningsdiagram som visar hur våra data ligger i ett koordinatsystem. Vi vet att data ligger i lista `L1` och `L2`.

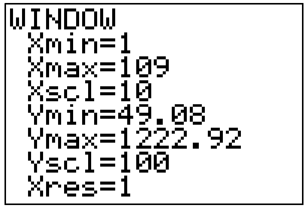
`Mark` betyder vilken markering vi ska ha på våra datapunkter.

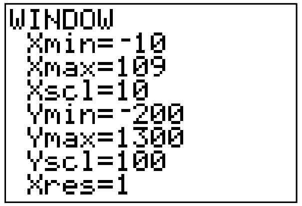
Låt inställningen vara den som visas i bilden ovan. Tryck sedan på `q` och välj där alternativ `9:ZoomStat`. Tryck sedan på `Ö`.



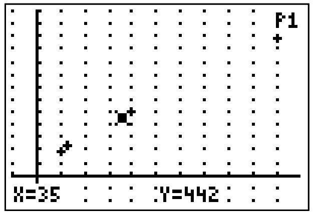


Nu ritas vårt spridningsdiagram upp. En nackdel med diagrammet är att vi inte ser några axlar så vi trycker nu på p. Den aktuella fönsterinställningen visas i bilden till vänster. Vi ändrar nu så att vi får en bild där axlarna syns. Se bilden till höger.

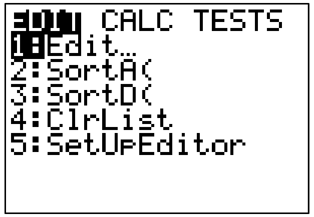


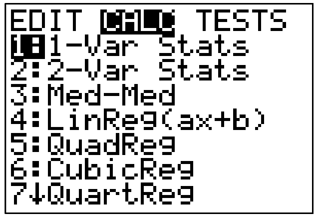


Tryck därefter på s. Genom att trycka på r kan du hoppa mellan datapunkterna och se *x*- och *y*-värden längst ner på skärmen.



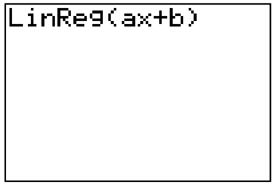
Äntligen ska vi nu pröva hur pass väl datapunkterna ligger efter en rät linje. Nu ska vi gå till statistikdelens beräkningsdel. Tryck först på Ö. Se bilden nedan till vänster som du känner igen. Flytta nu markören med ~ till alternativet CALC. Se bilden till höger.



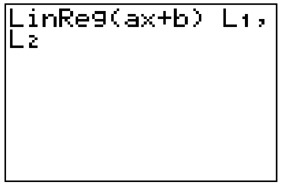


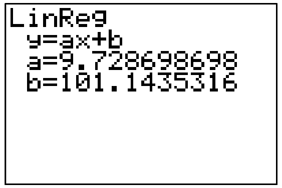
Här finns ett antal olika verktyg för beräkningar på inmatade data. Vi återkommer till en del av dessa senare. Det verktyg vi nu ska använda finns på rad 4. Vi ska nämligen göra en s.k. linjär regression och räknaren kommer då att försöka finna den *bästa räta linjen* genom de givna punkterna.

Tryck nu 4 för att välja alternativ 4:Linreg(ax+b). Då kommer en ny skärm fram. Se bilden överst på nästa sida..



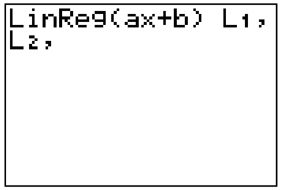
Nu ska vi fylla på instruktionen med var data ska hämtas. Data ska naturligtvis hämtas från kolumnerna L1 och L2. Vi trycker då y [L1],y [L2]. Se vänstra bilden nedan. Tryck sedan Õ. Se högra bilden. Vi får ekvationen för den bästa räta linjen beräknad.



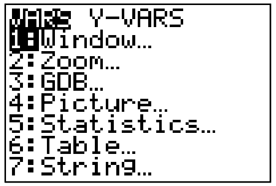


För att rita denna räta linje får vi mata in funktionen i menyn som vi når genom att trycka o. Finns det inget instruktion som gör att vi slipper skriva in ekvationen? Jo, det finns det. Vi ska nu visa hur man gör.

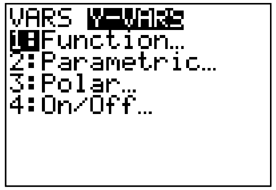
TI-83 innehåller ett stort antal fördefinierade namn för variabler och annat som kan lagras i minnet. Om vi befinner oss i grundfönstret kan dessa variabelnamn *kopieras* dit. Vi börjar om igen. Se till att du har detta framme på skärmen:

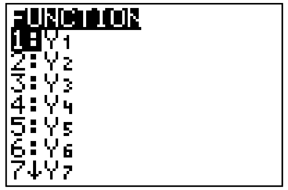


Om vi vill skriva Y1 kan vi inte utnyttja bokstavstangenten Y och lägga till en etta utan vi trycker på ê. Då kommer följande meny fram:

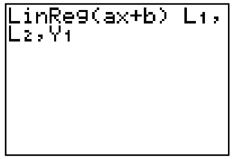


Flytta markören till Y-VARS på översta raden och tryck på Õ. Då kommer en ny meny fram (se vänstra bilden nedan) där vi ska välja alternativ 1. Tryck alltså på Õ. Då kommer listan med funktioner fram. Se bilden till höger nedan.

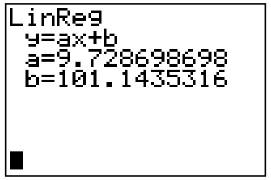


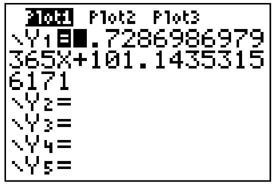


Välj alternativ 1:Y1 och tryck Õ. Då kopieras Y1 till grund-skärmen på den plats där markören befinner sig. Se vänstra bilden nedan.

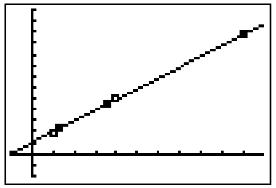


Nu trycker vi på Õ. Då får vi fram denna bild igen med ekvationen för den räta linjen. Tryck nu på o. Ekvationen har kopierats till Y1. Se högra bilden. Vi får en förfärlig massa decimaler, vilket naturligtvis är ganska onödigt. Om vi vill kan vi naturligtvis begränsa antalet decimaler.



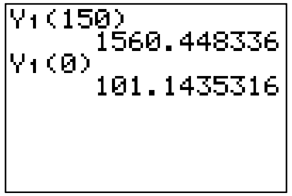


Trycker vi på s ritas datapunkter och den räta linjen i samma diagram. Vi ser att den beräknade räta linjen nästan perfekt går igenom datapunkterna.



I uppgiften skulle vi undersöka om trycket var en linjär funktion av djupet. På den frågan kan vi naturligtvis svara ja! Av grafen att döma låg datapunkterna nästan precis på den beräknade räta linjen.
Sedan skulle vi ta reda på trycket på 150 m djup och vid havsytan, dvs när djupet är 0 m.

Det finns flera sätt att ta reda på funktionens värden för $x = 150$ och $x = 0$. Tidigare gjorde vi avläsningar direkt i den grafiska bilden. Vi har också läst av i en tabell. Se s 15. Det finns ett tredje sätt som vi visar i bilden nedan. Att ta fram `Y1` till grundskärmen har vi ju just gått igenom. `Y1(0)` ges direkt av linjens ekvation. För $x = 0$ är ju y _ 101.

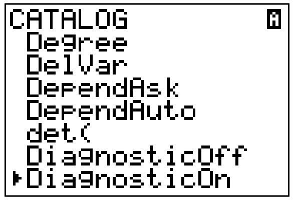


Svaren blir alltså 1560 kPa resp 101 kPa.

Till sist skulle vi beräkna vid vilket djup trycket var 300 kPa. Detta ger ekvationen $300 = 9{,}73x + 101$. Denna ekvation kan förenklas till $9{,}73x = 199$ som ger $x = 199/9{,}73$ och x _ 20,5.
Svaret är alltså 20,5 m.

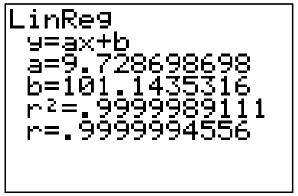
När vi fått fram en ekvation för en rät linje genom att göra linjär regressionsanalys, kanske vi vill veta *hur bra* vår modell är. Det kan ju vara så att den riktiga matematiska modellen inte alls är en linjär funktion.

Nu ska vi “leka doktor“ genom att göra en diagnos över hur pass bra vår modell är. På räknaren finns ett verktyg som heter just `Diagnostics`.
Tryck y [CATALOG]. Du kommer nu till en lista med räknarens alla funktioner och instruktioner. Därefter ska du snabbt hitta `DiagnosticsOn` genom att trycka på första bokstaven i det ord du söker i listan. I detta fall ska du alltså skriva D. Bläddra dig ner till du hittar `DiagnosticsOn` och tryck på Õ. Se bilden på nästa sida.



Då kommer `DiagnosticsOn` upp i grundfönstret och nu ska du trycka på Õ en gång till. Räknaren svarar `Done` och diagnos-verktyget är på.

På skärmen kommer nu två statistiska storheter, *r* som kallas korrelationskoefficient resp r^2 som kallas förklaringsgrad.
För korrelationskoefficienten r gäller att $-1 < r < 1.$ Kort kan man säga att ett värde på *r* som ligger nära 1 eller –1 uttrycker att starkt linjärt samband. Sambandet i detta fall är alltså starkt.

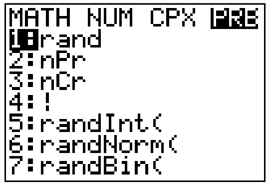


10 Exponentiella modeller och slumptal

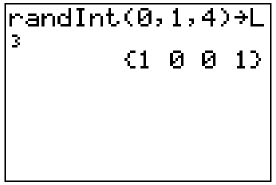
Tänk dig att du har 4 st mynt som du kastar krona och klave med. I första kastet får du kanske 1 krona. Du lägger då till en krona till dina tidigare 4 och kastar nästa gång 5 st mynt. Nu får du 3 st krona. Du lägger till dessa till dina tidigare 5 och kastar nästa gång 8 st mynt.

Så här håller du på och antecknar hur många mynt du kastar i första, andra, ... , kastet. Finn en matematisk modell för sambandet mellan antalet försök och antalet mynt som man kastar.

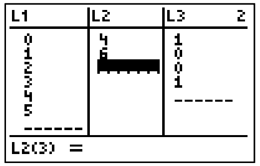
Om vi nu inte har några mynt kan vi istället låta räknaren kasta mynt åt oss. Räknarens slumptalsfunktioner finner du om du först trycker ç och sedan med ~ flyttar dig till PRB. PRB står för probability som betyder sannolikhet. Då kommer du till en meny med sju st olika funktioner.



För att skapa heltaliga slumptal ska vi välja alternativ `4:randInt(`. Om vi nu trycker Õ kopieras instruktionen till grundfönstret. Vi fortsätter sedan att fylla i instruktionen enligt nedan. Därefter trycker vi på Õ.

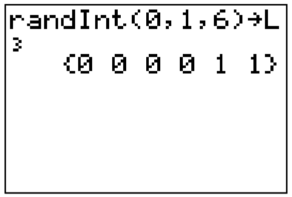


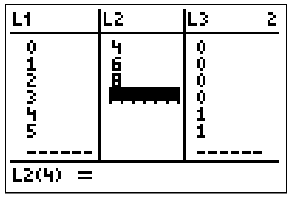
Vad betyder nu instruktionen ovan? Jo, det som står i parentesen betyder att vi ska alstra heltaliga slumptal mellan `0` och `1` och att det ska alstras 4 st sådana slumptal. Dessa slumptal ska sedan lagras i lista `L3`. Det var allt!



I lista `L3` ser du våra data. De är 2 st ettor och i lista `L2` har vi adderat två till de fyra mynt vi hade från början. Alltså 6 st totalt. Det står på andra raden i lista `L2`. I `L1` finns en lista 0, 1, 2, ... som anger 0 försök, 1 försök osv.

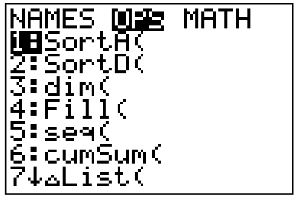
Vi fortsätter. I andra försöket "kastar" vi 6 st mynt och utfallet syns i vänstra bilden nedan. I högra bilden ha vi situationen i statistikeditorn.

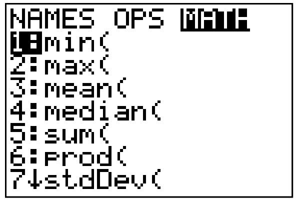




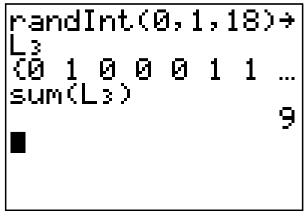
Så här håller vi på. Efter ett tag, när vi har många mynt, kan vi inte direkt räkna antalet ettor i lista L3. Denna lista uppdateras varje gång med nya data. Det finns dock ett enkelt sätt att räkna dem.

Gå till grundfönstet och tryck y [LIST]. Flytta markören till [OPS] med ~ och tryck Õ. Nu kommer en meny med massa olika funktioner som har med listor och statistik att göra. Vi ser bara en del av menyn. Flytta nu till [MATH]. Funktionerna där syns i högra bilden nedan.

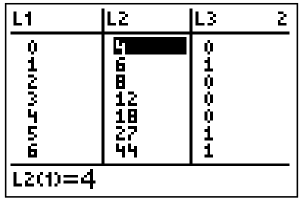




Gå till `3:sum` och tryck Õ. sum betyder medelvärde. Då kopieras den instruktionen till grundfönstet. Fyll i att det är summan i `L3` du ska beräkna. Den summan är ju samma sak som antalet ettor.

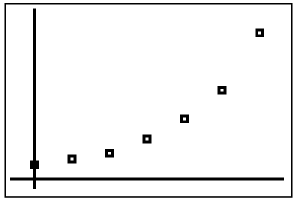


Efter 6 kast ser vår lista ut så här:

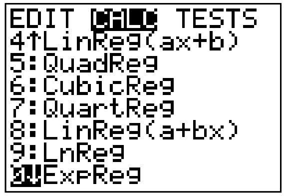


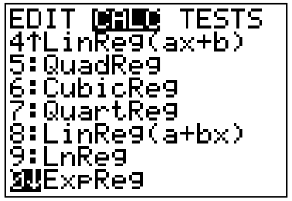
Nu kan vi göra en analys på de data som vi har i `L1` och `L2`. Vi trycker på q och väljer alternativ `9 ZoomStat`.

Nedan syns diagrammet.

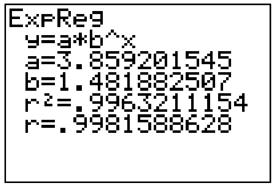


Om vi funderar en stund på försöket inser vi säkert att i teorin ska antalet mynt *fördubblas* efter varje försök. Det är alltså fråga om en *exponentiell modell*. Vi flyttar oss alltså till statistik med knappen Ö och flyttar oss med ~ till `CALC` och väljer där alternativ `0:ExpReg`, som står för exponentiell regression.



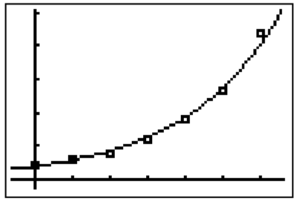


Sedan trycker vi på Õ. Instruktionen kopieras till grundfönstret och vi fyller på med i vilka listor data ligger och var den beräknade exponentialfunktionen ska hamna. Sedan trycker vi på Õ.



På skärmen syns nu den beräknade funktionen. Med tre värdesiffror kan vi skriva den som $y = 3{,}86 \cdot 1{,}48^x$. Vi ser också att korrelationen är mycket god, *r* _ 0,998.

Nu trycker vi på q och väljer sedan alternativ `9:ZoomStat.` Punkterna plottas och Grafen ritas upp. Se bilden på nästa sida.



I detta försök stämde utfallen väldigt bra med de teoretiska sannolikheterna och resultatet blev påfallande bra. Den teoretiska modellen är naturligtvis

$$y = 4 \cdot 1{,}5^x$$

Vi började ju med 4 mynt och i modellen ska antalet mynt öka med 50 % efter varje försök.

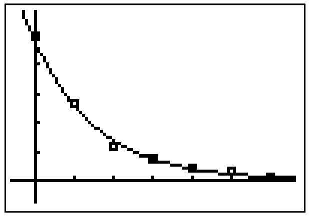
Ju fler mynt vi kastar desto större är sannolikheten att den relativa frekvensen för antalet krona ligger nära 0,5 (50 %).

På samma sätt kan man få funktion som *avtar* exponentiellt. Man börjar då med ganska många mynt och tar efter varje försök bort så många som motsvaras av antalet krona.

Om man börjar med 50 st mynt kanske man får följande serie:

50, 27, 12, 7, 4, 3, 1

Resultatet visas i diagrammet ovan:



$$y = 47{,}6 \cdot 0{,}54^x$$

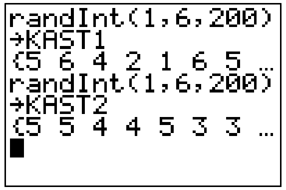
Den teoretiska modellen är naturligtvis

$$y = 50 \cdot 0{,}5^x$$

11 Mer om slumptal och diagramritning

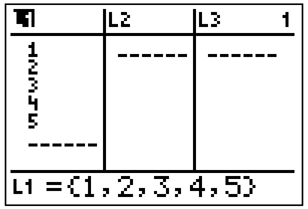
Vi tänker oss situationen att vi har två tärningar som vi kastar ett stort antal gånger. Vi räknar *sammanlagda* antalet prickar. Beräkna med hjälp av räknaren sannolikheterna för utfallen 2 prickar, 3 prickar osv. Jämför sedan med de teoretiska sannolikheterna.

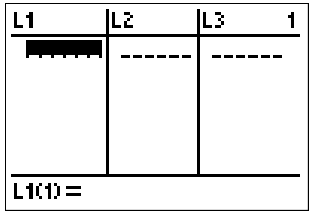
Vi genomför nu försöket med räknarens slumptalsfunktioner.



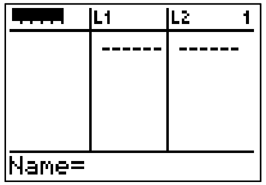
Ovan ser vi att vi har alstrat två st kastserier med 200 kast i varje försök. Vi har sparat data från kastserierna under två nya variabelnamn, `KAST1` resp `KAST2`. Man behöver alltså inte lägga sina data i listor som heter `L1`, `L2` osv. Du kan läsa mer om namn på listor i Hand-boken s 11.4-11.8.

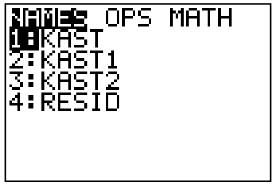
Vi trycker nu på Ö och trycker sedan på `1:Edit` för att få fram statistikeditorn. Tidigare ha vi tömt alla listor. Det gör man genom att ställa markören på rad 1 och sedan trycka }. Då ställer sig markören i listhuvudet. Sedan trycker man på è och sedan på Õ. Då rensas listan på alla data.



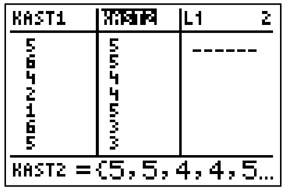


Nu placerar vi återigen markören i första listans huvud och trycker sedan y [INS]. Då inpassas en ny kolumn till vänster om den kolumn där markören finns. Längst ner ska vi kopiera in variabelnamnet KAST1.

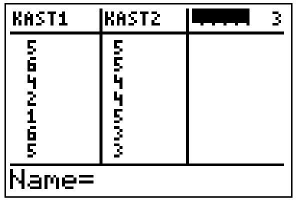


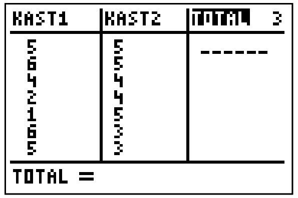


Om vi ska kopiera in namnet (vi antar alltså att du står i läge att skriva in variabelnamnet) trycker vi på y [LIST]. Då kommer en förteckning med alla sparade listor. Se högra bilden ovan. Vi väljer alternativ `2:KAST1 genom` att trycka ¡ och sedan Õ. Då inkopieras namnet på raden `Name=`. Nu kan vi bekräfta genom att trycka på Õ en gång till. Alla data kommer nu in i listan i editorn. Vi gör på samma sätt med listan `KAST2`. Se bilden nedan.



Nu ska vi skapa en ny lista, "TOTAL", där vi ska summera data i första och andra listan. Först skapar vi en lista "TOTAL" genom att som förut placera markören i första listans huvud och trycka y [INS]. Då inpassas en ny kolumn till vänster om den kolumn där markören finns. Se vänstra bilden nedan. Sedan skriver i namnet TOTAL och trycker på Õ. Se bilden nedan till höger.





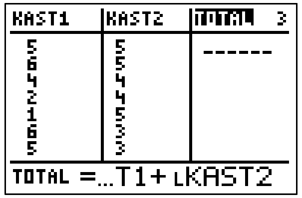
Nu kan vi skriva in formeln för att addera data i listorna KAST1 och KAST2. Då trycker vi först på y [LIST]. Då får vi listan med alla sparade listor. Du se att namnet TOTAL redan finns i förteckningen.

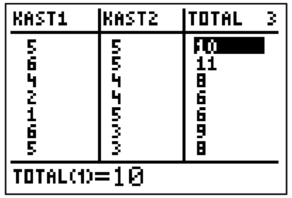
Med Ü flyttar du nu markören till KAST1. Då inkopieras namnet KAST1 på raden längst ner. Namnet föregår av listnamnsymbolen L som visar att det är en lista vi kopierar in.

Tryck sedan Ø y [LIST]. Då kommer du till förteckningen med listnamn igen. Med Ü flyttar du nu markören till KAST2 och trycker på Õ. Då har vi formeln

“TOTAL =ʟKAST1+ʟKAST2“

i inmatningsfältet längst ner. Hela formeln får inte plats på raden. Se vänstra bilden nedan. Nu trycker vi på Õ. Resultatet kommer snabbt i listan TOTAL.

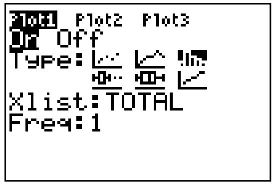




I listan TOTAL har vi då 200 st utfall “totalantalet prickar vid kast med två tärningar“.

Nu ska vi rita ett diagram som visar hur många “prickar“ vi fick i de 200 försöken. Antalet prickar kan naturligtvis variera mellan 2 och 12.

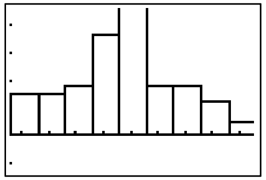
Vi gör nu en inställning inför diagramritning genom att trycka y [STAT PLOT]. Välj sedan alternativ 1 och ställ in enligt bilden.



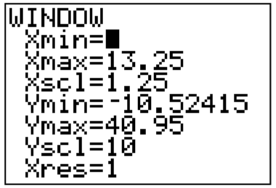
Under Type väljer vi histogram, “ . Egentligen passar ett stolpdiagram bättre eftersom vi har en *diskret variabel* (TOTAL kan bara anta heltalsvärden) men TI-83 har inte den diagramtypen med.

Xlist är naturligtvis data i listan TOTAL och Freq sätter vi till 1 eftersom de olika värdena bara förekommer 1 gång. Vi har ju en lista med alla förekommande data, inte en frekvenstabell.

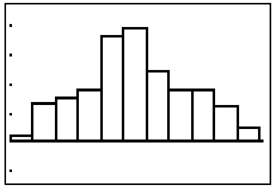
Nu trycker vi på q för att ställa in för att rita statistiska data. Välj alternativ 9:ZoomStat och tryck Õ. Se bilden på nästa sida.



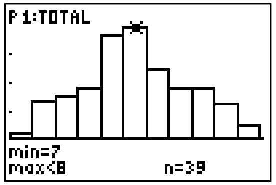
Vi borde få ett diagram med 11 st staplar (2-12) men det får vi inte. Vad vi får beror lite på hur inställningen var i det sist ritade diagrammet. Vi får då gå in och ställa om vårt fönster. Vi trycker på `p`. Se vänstra bilden nedan. Vad vi måste ändra nu är *skalningen* på *x*-axeln. Eftersom varje stapel ska ha bredden 1 ska `Xscl` vara 1. Vi ändrar `Xscl` till 1.



Nu ritar vi om diagrammet. Se bilden nedan.



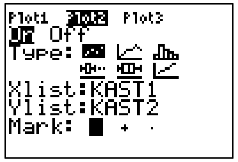
Nu kan vi "spåra" i diagrammet genom att trycka på `r`.



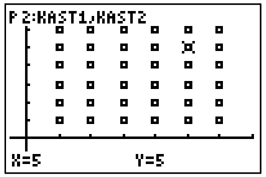
Om vi flyttar oss med ~ till den högsta stapeln kan vi läsa av `min` `7,` `max` < `8,` `n` = `39`. Det betyder i detta fall att vi har 39 st värden 7. Eftersom det är ett histogram svarar räknaren att det finns 39 st värden mellan 7 och 8 men här har vi ju data som bara kan anta heltalsvärden.

Hur pass bra stämmer detta med de teoretiska värdena?

Vi ritar nu ett spridningsdiagram på de data vi har i listorna KAST1 och KAST2. Vi stänger av `Plot1`, där vi hade ställt in för att rita histo-grammet och gör en inställning för ritning av spridningsdiagrammet i `Plot 2`. Se bilden nedan.

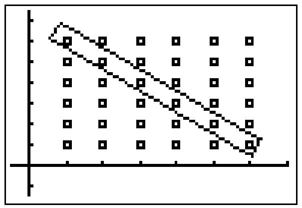


Nu upprepar vi samma procedur som förra gången: vi trycker på `q` och väljer alternativ `9:ZoomStat`. Nu ritas ett “mystiskt“ diagram där vi inte ser några axlar. Vi går in i `p` och ändrar fönstret så att axlarna syns och så att vi får in text längst ner när vi spårar.



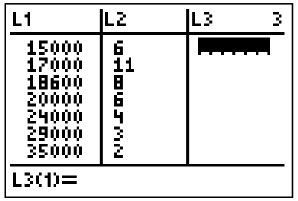
Vad vi ser är alltså ett diagram där varje försök - kast med två tärningar - är representerade. På *x*-axeln är resultatet “antalet prickar på första tärningen“ avsatt och på *y*-axeln “antalet prickar på andra tärningen“. Vi ser att alla utfall förekommer. Det finns inget tomrum någonstans. I de flesta fall täcker också utfall som förekommer flera gånger, t ex utfallet (4, 3) varandra. Om vi trycker på `r` och sedan på ~ hoppar vi fram och tillbaka mellan de olika utfallen.

Om vi tittar på spridningsdiagrammet nedan, där utfallet sammanlagt 7 prickar är inritat, ser vi att det förekommer 6 gånger. Det totala antalet utfall är 6 · 6 = 36 och den teoretiska relativa frekvensen för 7 prickar blir då 6/36 _ 0,17. I simuleringen med räknaren fick vi den relativa frekvensen 39/200 _ 0,195.



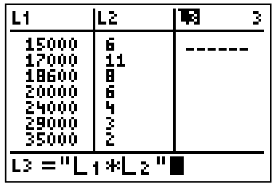
12 Räknaren som kalkylprogram

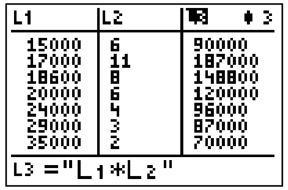
Vi tänker oss ett företag där de anställda har löner enligt tabellen nedan. Den första listan, `L1`, visar lönen och den andra, `L2`, antalet personer med denna lön. En frekvenstabell alltså. Nu har man kommit överens om att lönen ska höjas med 5 % beräknat på medellönen i företaget. Vi ska räkna ut de nya lönerna och presentera dessa i en tabell. Räkna också ut de nya lönerna om man baserar lönehöjningen på medianlönen.



Vi börjar med att räkna ut den totala lönesumman för varje grupp. Då multiplicerar vi data i `L1` med data i `L2` och lägger dessa data i `L3`. När vi gör detta ser vi till att “koppla“ formeln för denna beräkning. Det betyder helt enkelt att ändringar i ingångsdata i `L1` och `L2` *uppdateras* i listor där data beror av data i ingångslistorna.

För att göra detta skriver vi citationstecken omkring den formel vi ska använda.

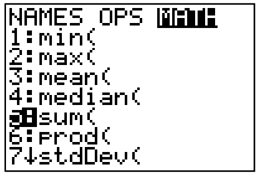




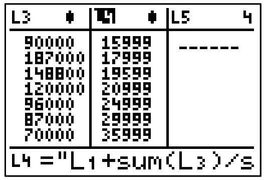
För att beräkna medelvärdet får vi dividera lönerna (totala lönesumman) i lista `L3` med totala antalet anställda, dvs data i lista `L2`. Sedan ska vi ta 5 % av denna lön och addera till lönerna i lista `L1`. Dessa data ska läggas i `L4`. Den formel vi ska använda då blir

L4 = “L1+sum(L3)/sum(L2)*0.05“

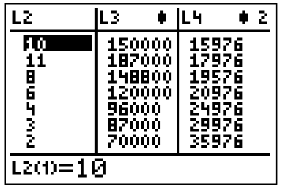
Funktionen sum kopiera in från List-menyn. Tryck `y` [LIST] och välj sedan alternativ `MATH`. Se nästa sida.



När vi matat in formeln och tryckt på Õ kommer de nya lönerna i lista L4. Vi ser att hela formeln inte får plats i inmatningsfönstret.



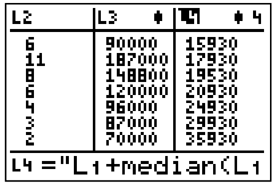
Nu kommer själva "grejen". Antag att fyra st personer börjar arbeta på företaget. De får en lön på 15 000 kr och dessa nya ska ingå i beräkningen av de nya lönerna. Vi går då in och ändrar data i lista L2 så att det står 10 på första raden. Om vi tittar på de sista listorna ser vi de har uppdaterats. Nu blev lönehöjningen istället 976 kr mot tidigare 999 kr.

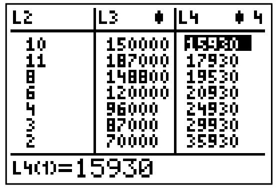


Om lönehöjningarna istället baseras på medianlönen blir formeln i listhuvudet i L4

"L1+median(L1,L2)*0.05".

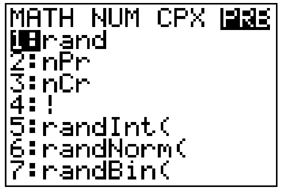
Det som står inom parentes anger lista, frekvens. Man behöver alltså inte ha alla löner i *en* lista utan kan också ha en frekvenstabell. Om nu samma 4 personer med en lön på 15 000 kr kommer in i beräkningen blir resultatet enligt högra bilden nedan. Vi får samma värden! Fundera ut varför det blir så!





13 Kombinatorik och mer sannolikhetslära

På räknaren finns ett antal verktyg som har med sannolikhet att göra. Tryck på ç och flytta sedan markören till PRB. Tryck nu på Õ. Då kommer följande meny fram:



Instruktion randInt har vi redan använt. Den genererar heltaliga slumptal mellan två gränser.

Vi börjar med instruktionen 4:!. ! betyder i detta sammanhang fakultet och 3! är samma sak som $1 \cdot 2 \cdot 3$ och allmänt

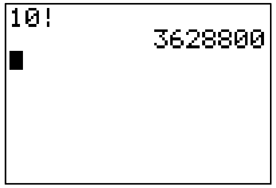
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n.$

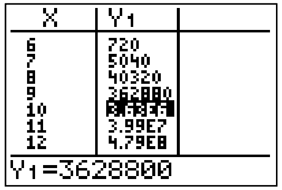
Ett typexempel på användning av fakultet är följande problem:

På hur många sätt kan 10 böcker i en bokhylla placeras invid varandra?

Den första boken kan placeras på 10 sätt, den andra på nio sätt osv. Totalt blir det (se räknarbilden nedan) 3 628 800 olika sätt. Om man skriver in Y1=X! i editorn för inmatning av funktioner (o-menyn) kan man genom att trycka y [TABLE] snabbt få en lista med framräknade fakulteter för olika *x*-värden.

Se till att du har ställt in i [TBLSET] så att differensen mellan varje *x*-värde är 1.


10!
3628800


X
Y1
6
7
8
9
10
11
12
720
5040
40320
362880
3.99E7
4.79E8
Y1=3628800

I en skola ska man utse en tre matematiklärare till styrelseledamöter i en förening. Man ska välja ordförande, sekreterare och kassör. Det finns 10 st matematiklärare. På hur många sätt kan man utse denna trepersonersgrupp?

Här kan man naturligtvis resonera sig fram till det rätta svaret. Den först utsedde läraren, som ska bli ordförande, kan väljas på 10 sätt, nästa lärare kan väljas på 9 sätt, och den tredje läraren på 8 sätt. Multiplikations-principen ger då att det finns sammanlagt

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \text{ sätt}$$

att utse denna lärargrupp.

Problemet ovan visar en kategori av problem som är vanliga i kombinatorik: av n olika objekt ska man välja ut en delmängd av k objekt och dessa ska uppräknas i en viss ordningsföljd. En sådan här delmängd kallas för en *permutation* av k element ur n givna.

Antalet permutationer av k olika objekt ur n givna är

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

På räknaren finns en inbyggd funktion `nPr` med vilken man kan beräkna antalet permutationer. Problemet ovan kan alltså direkt beräknas om man skriver som skärmbilden nedan visar.

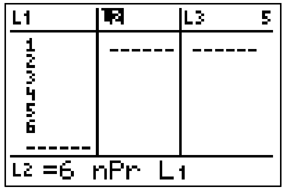
```
10 nPr 3
             720
█
```

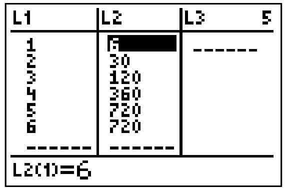
Först skriver man alltså 10, sedan trycker man på knappen ç, flyttar markören med ~ till alternativet PRB och trycker sedan på ¡. Då inkopieras instruktionen `nPr` till grundfönstret. Sedan avslutar man med att skriva 3 och trycker sedan på Õ.

Hur många nya ord kan man bilda ut ordet <u>objekt</u>? Alla ord är tillåtna och ett ord kan bestå av en till sex bokstäver?

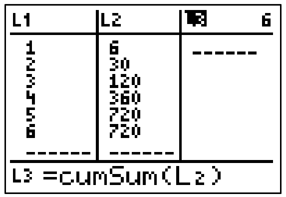
Vi vet att antalet ord med 1, 2, ... , 6 bokstäver är lika med antalet permutationer av 1, 2, ... , 6 bokstäver valda bland 6.
Antalet ord t ex med två bokstäver är med “räknarspråk“ `6 nPr 2`. Det blir 30.

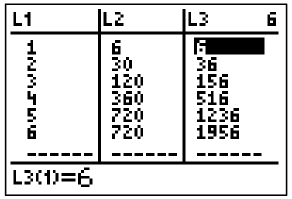
För att beräkna alla möjligheter måste vi summera antalet ord med 1 bokstav, 2 bokstäver osv upp till 6 bokstäver. Nu kan räknaren verkligen komma till vår hjälp. Vi förflyttar oss till editorn för statistik genom att trycka Ö och sedan Õ. Sedan matar vi in följden 1, 2, 3, 4, 5, 6 i första listan. Sedan går vi till listhuvudet i den andra listan och skriver enligt skärmbilden nedan till vänster. Sedan trycker vi på Õ. Se skärmbilden till höger.





Nu gäller det bara att beräkna summan i lista `L2`. Det kan göras på olika sätt. Ett sätt, som samtidigt ger den *kumulerade* frekvensen för data i `L2,` är att använda instruktionen `cumSum`. Placera först markören i listhuvudet till L3. Sedan finner du instruktionen genom att trycka y [LIST] och sedan välja `OPS`, som står för Options. Om du trycker 6 inkopieras denna instruktion i listhuvudet.





Svaret blir alltså att 1956 “ord“ kan bildas ur ordet objekt.

Om man *inte tar hänsyn till ordningen* använder man instruktionen `nCr` på räknaren. Att bland *k* givna välja ut *n* st kallar man välja ut en *kombination*.

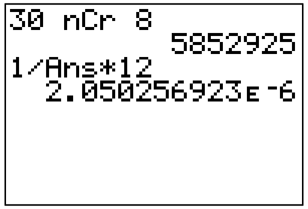
Antalet kombinationer av *k* olika objekt ur *n* givna är

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Man brukar skriva detta tal som $\binom{n}{k}$, som utläses “*n* över *k*“.

På måltipset gäller det att bland 30 matcher välja ut de 8 målrikaste. Hur stor är sannolikheten att du får 8 rätt om du lämnar in 12 olika rader.

Vi beräknar här först antalet kombinationer. För att få sannolikheten tar vi 1/antalet kombinationer och sedan multiplicerar vi med 12 eftersom det lämnades in 12 olika rader. Beräkningarna finns på skärmbilden nedan.



Nu ska vi titta lite närmare på försök som man *upprepar*.

Vi kastar en tärning 10 gånger. Vad är sannolikheten av vi får exakt 2 sexor?

Detta är inte alldeles enkelt. I detta problem kommer antalet kombinationer in. Antalet kastserier med 2 sexor är lika med `10 nCr 2`.

Vi ska inte närmare gå in på teorin för dessa upprepade försök. Allmänt gäller:

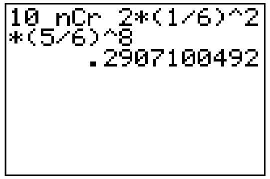
Antag att en händelse i ett slumpmässigt försök har sannolikheten *p*. Om man gör *n* oberoende försök är sannolikheten att händelsen inträffar *exakt k* gånger

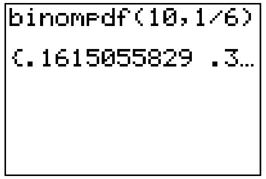
$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dessa sannolikheter kallas *binomialfördelningen*.

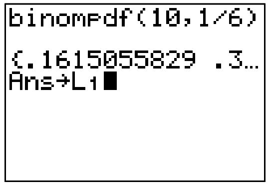
$\binom{n}{k}$ skrivs på räknaren `n nCr k`.

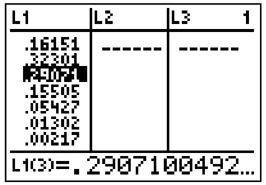
I vårt problem blir alltså beräkningarna enligt skärmbilden nedan. Till höger visas resultatet med räknarens inbyggda funktion.



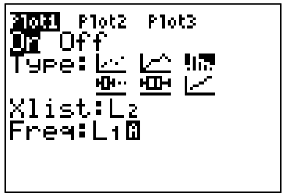


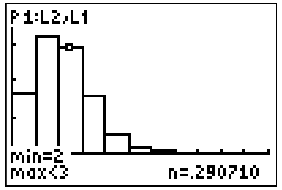
Du hittar funktionen `binompdf` genom att trycka `y` [DISTR]. I den lista som då kommer fram finns ett stort antal funktioner för att beräkna olika sannolikhetsfördelningar.
Resultatet visas som en lista. Listor brukar man, för att kunna läsa dem bra, lägga i editorn för statistik. Vi lägger våra data i lista `L1` genom att använda instruktionen `Ans`.





Om vi tittar på denna lista ser vi att där visas sannolikheten att lyckas få en sexa 0 gånger, 1 gång, två gånger, ... , 10 gånger. Ur denna lista kan man också lätt beräkna händelser som t ex “få *minst* tre sexor“ mm. Vi kan rita ett diagram på detta för att få överskådlighet. Först gör vi då en lista 0, 1, 2, ..., 10 i lista `L2` t ex. Vi fyller i inför diagramritningen på enligt schemat nedan till vänster:





Det är även möjligt alstra slumptal enligt en bestämd binomial-fördelning. Instruktionen heter `randBin` och du finner den under knappen `ç` och alternativet `PRB`. Instruktionen `randBin(10, 1/6, 200)` ∅ `L3` alstrar t ex 200 slumptal enligt den aktuella binomialfördelningen.

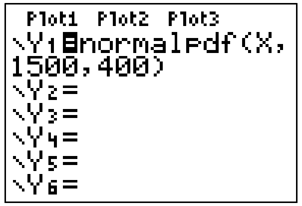
14 Normalfördelningen

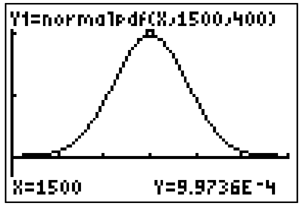
På räknaren finns också ett antal inbyggda funktioner för normalfördelningen. På samma sätt som för binomialfördelningen kan man *alstra* slumptal. I detta fall simulerar man ett slumpmässigt urval av en normalfördelad population.

> På ett företag används glödlampor, vilkas livslängd (vid normal användning) får anses normalfördelad med medelvärdet 1 500 timmar och standardavvikelsen 400 h.
>
> a) Hur många av glödlamporna har en livslängd mellan 1 000 och 2 000 timmar?

För att få en bild av hur livslängdens fördelning ritar vi snabbt upp frekvensfunktionen.
Placera först markören i editorn för inmatning av funktioner, t ex vid `Y1`. Tryck sedan y [DISTR]. Då kommer en meny upp där du väljer alternativ 1.

Då inkopieras funktionen `normalpdf` till editorn för funktionsinmatning. Efter parentesen skriver du `X,1500,400)`. Se skärmbilden nedan. Sedan ritar vi denna frekvensfunktion. Man får pröva lite för att få ett bra fönster.

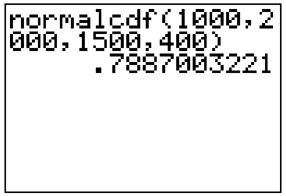




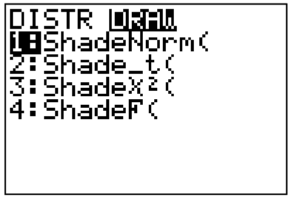
För att beräkna hur stor andel av glödlamporna som har livslängder mellan 1000 och 2000 timmar räknar man först ut hur många standardavvikelser från medelvärdet som 1 000 resp 2 000 timmar ligger. Sedan måste man slå i en tabell.

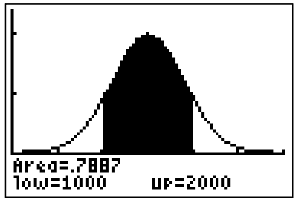
Så behöver man inte göra idag. Räknaren har inbyggda funktioner som klarar detta snabbt och elegant.

Det finns två sätt att lösa denna uppgift:
Tryck y [DISTR] igen och välj alternativ `2:normalcdf`. Denna funktion beräknar sannolikheten att livslängden ligger mellan *nedre gräns* och *övre gräns* vid ett givet *medelvärde* och en given *standardavvikelse*. Se skärmbilden till vänster nedan. Svaret blir alltså att ca 79 % av glödlamporna har en livslängd mellan 1 000 och 2 000 timmar.



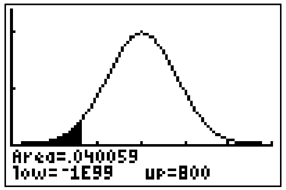
Det finns ett annat sätt. Man trycker även denna gång y [DISTR] men flyttar sedan markören till alternativet [DRAW]. Se vänstra bilden nedan. Man väljer alternativ 1 och skriver sedan
`ShadeNorm(1000,2000,1500,400)`
Sedan trycker man på Õ och frekvenskurvan ritas upp och området mellan gränserna skuggas. Se skärmbilden till höger nedan.





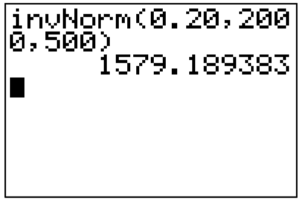
b) Hur många glödlampor har en livslängd som är mindre än 800 timmar?

Vi använder nu den senare metoden med grafritning. Någon nedre gräns finns naturligtvis inte. Det minsta tal som vi kan representera med räknaren är -10^{99}, som med räknaren skrivs `–1E99`. Svaret blir ca 4 % av glödlamporna. Se skärmbilden.

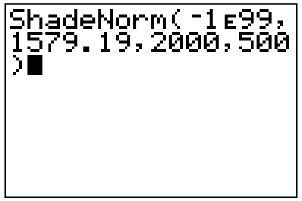


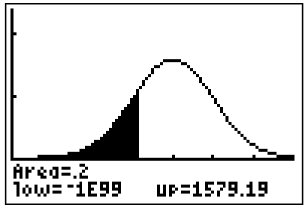
c) Vi tänker oss att nu att man byter till nya bättre glödlampor samtidigt. Om vi antar att livslängden är normalfördelad, med en livslängd på 2 000 timmar med en standardavvikelse på 500 timmar, hur länge ska man då vänta med att byta alla glödlampor om man vill att högst var femte glödlampa ska hinna gå sönder?

Här kan man använda en funktion som heter `invNorm` som beräknar den övre gränsen så att arean under kurvan blir 0,20 a.e. (1/5 motsvarar ju 20 % av lamporna.) Någon nedre gräns har vi inte i detta fall. I de tidigare deluppgifterna a) och b) har vi beräknat arean när vi kände den båda gränserna eller den övre gränsen.

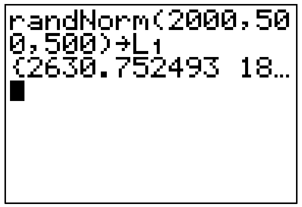


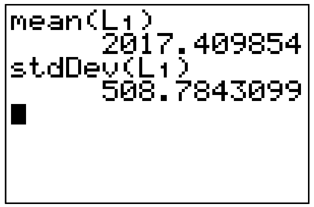
Svaret blir att man kan vänta högst 1580 timmar. Nedan har vi sedan räknat åt andra hållet genom att mata in den beräknade övre gränsen. Vi ser att det stämmer. Arean blir 0,2 a.e.





Vi avslutar detta avsnitt med att göra ett slumpmässigt urval på 500 lampor med de uppgifter vi har i c)-uppgiften. Vi använder slumptals-funktionen `randNorm`. Det tar en liten stund att alstra dessa värden. I högra bilden har vi beräknat medelvärde och standardavvikelse. Dessa funktioner kopieras till grundfönstret från LIST-menyn.





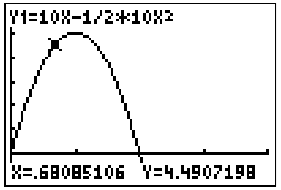
15 Visa rörelse och lite om derivator

> En flicka kastar en boll rakt upp luften med begynnelsehastigheten 10 m/s och fångar den på samma höjd när den kommer ner igen. Hur länge är bollen i luften.
>
> a) Rita en graf som visar bollens läge som funktion av tiden.
>
> b) Visa själva rörelsen.

a) Här ska man använda det välkända sambandet från fysiken

$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ Vi sätter tyngdaccelerationen g till 10 m/s^2

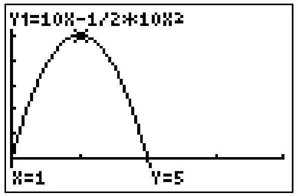
Vi matar in Y1= 10X–1/2*10X^2 i editorn för inmatning av funktioner. Vi ställer in fönstret och ritar upp denna funktion. Med r kan vi spåra längs kurvan och se tid och läge.

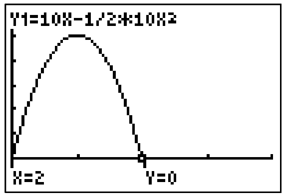


Om vi vill beräkna det högsta läget, dvs kurvans maximipunkt, har vi olika möjligheter. Vi kan derivera funktionen och sätta derivatan lika med noll:

$y' = 10 - 10t$ $y' = 0$ ger $10 - 10t = 0$ med lösningen t =1.

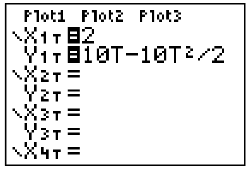
När t = 1 är funktionens värde $10 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 5.$ Den högsta punkten, dvs när bollen vänder, nås efter 1 sekund och bollen är då 5 meter upp i luften. Vi kan se detta genom att skriva in x =1 i r-läget. Se skärmbilden nedan. Bollen träffar marken igen efter 2 sekunder



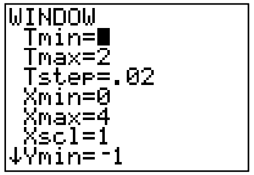


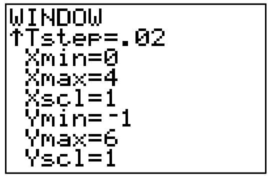
b) Om vi nu vill visa själva rörelsen kan vi inte direkt rita detta genom att mata in en funktion. Då får vi övergå till att skriva om vår funktion på *parameterform*. Du kan läsa mer om parameterform på s 4.1 och framåt i Handboken.

Bollen rör sig rakt upp och ner igen så det vi är intresserade av är hur läget i y-led beror av tiden. Ställ om räknaren till parameterform genom att först trycka på z och på fjärde raden ställa om till läget Par.
Tryck sedan på knappen o och skriv in enligt skärmbilden nedan.

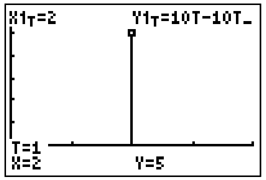


På första raden har vi bara ställt in ett bra läge på skärmen för det vi ska visa. Ställ nu in fönstret enligt skärmbilderna nedan.



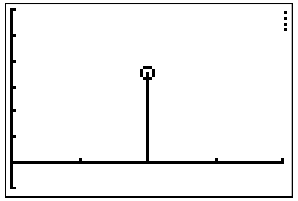


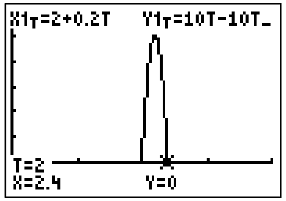
Några förklaringar: Tmin och Tmax anger det tidsintervall för vilket vi ska visa rörelsen. Tidigare såg vi att bollen kom tillbaka till utgångs- läget (y =0) efter 2 sekunder. Nu ritar vi grafen. Vi kan spåra i grafen och vi ser att bollen vänder efter 1 sekund. Se skärmbilden nedan.



Det blev ett rakt streck rakt upp och ner igen och det visade ju faktiskt rörelsen. Gå nu till editorn för inmatning av funktioner igen och ställ markören längst till vänster på översta raden. Tryck nu på Õ några gånger tills du får en blinkande “nyckel“ ute till vänster.

Rita nu grafen igen. Nu ser du bollen röra sig uppåt med avtagande hastighet, vända, och sedan falla tillbaka igen med stigande hastighet. Vi har alltså sett “filmen“ om bollen. Du kan stanna och starta rörelsen genom att trycka upprepade gånger på Õ.





Om vi ger bollen en “liten vindskjuts“ åt höger, t ex genom att skriva X1T=2+0.2T, får vi bilden till höger. Bollen ramlar ju inte ner i exakt samma bana som den kastades upp i. Nu till en annan boll.

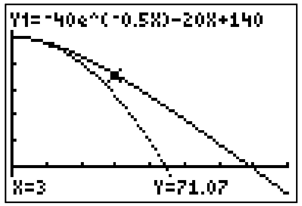
En boll faller utan begynnelsehastighet från 100 meters höjd. Luftmotståndet är proportionellt mot hastigheten och bollens läge *s* kan beskrivas med funktionen

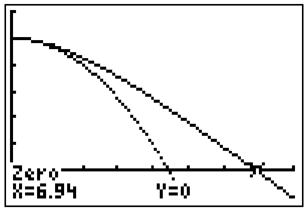
$$s = -40e^{-0,5t} - 20t + 140$$

a) Rita en graf som visar bollens läge som funktion av tiden.

b) Rita en graf som visar hur hastigheten beror av tiden.

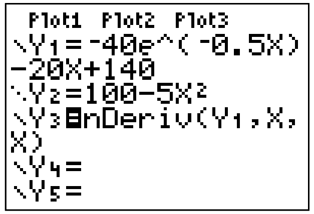
a) Vi matar in vår funktion och ställer sedan in ett bra fönster. Som jämförelse har vi även lagt in den streckade kurva som beskriver situationen utan luftmotstånd (Y2=100-5X^2). Vi kan också beräkna när bollen träffar marken med verktyget zero, som vi kan nå genom att trycka y [CALC] när vi har grafen framme.





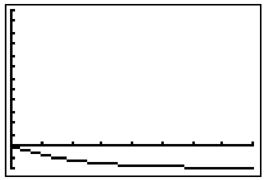
För att beräkna hur hastigheten beror av tiden får vi påminna oss om att hastigheten är derivatan av vägen med avseende på tiden, dvs $v(t) = s'(t)$.

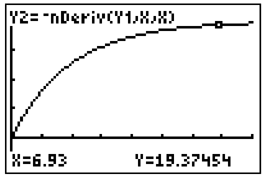
Med räknaren kan man nu göra en numerisk derivering med en inbyggd funktion som heter nDeriv.
Gå först till editorn för funktioner genom att trycka o. Ställ markören vid Y2, tryck sedan ç och gå ner till alternativ 8 och tryck Õ (eller tryck _). Då inkopieras funktionen nDeriv(. Skriv sedan som skärmbilden nedan visar. Y1 inkopieras genom att trycka på knappen ê, välja alternativet Y-VARS, sedan 1:Function och till sist 1:Y1. Genom att skriva som nedan så ritas nu den numeriska derivatan för funktionen Y1. Den beräknas som en *symmetrisk differenskvot*. Läs mer om hur differenskvoten beräknas i Handboken på s 2.8.



När vi nu ska rita hastighetsfunktionen (Y3) ser vi till att stänga av ritning av gamla funktioner. Det gör man genom att ställa markören över likhetstecknet och trycka Õ. Vidare får man kanske pröva sig fram för att kunna rita funktionen i ett “bra fönster“.

Om vi ritar denna hastighetsfunktion utan att ändra fönstret från den tidigare inställningen ser det ut som bilden nedan till vänster. Hastigheten verkar vara 0 från början för att sedan avta. Det beror på att den positiva riktningen pekar uppåt och tyngdkraften nedåt. Vi ändrar då bara tecken i Y3, dvs skriver -nDeriv(Y1,X,X). Sedan kan vi ställa in ett hyfsat fönster. (Ymin =-5, Ymax = 22). Se högra bilden. När bollen träffar marken är hastigheten ca 19 m/s.





Nu ska vi jämföra med den exakta derivatan. Om vi deriverar exakt får vi (med rätt tecken) Y4=-(20e^(-0.5X)−20). Om vi ritar både Y2 och Y3 ser vi att de överlappar varandra.

16 Ekonomiska funktioner

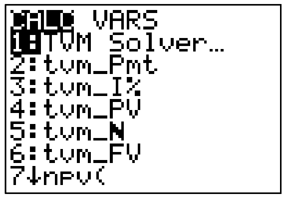
TI-83 har ett stort antal verktyg för olika typer av ekonomiska beräkningar. Tidigare har vi löst en del problem som handlar om pengar och ränta med upprepade beräkningar med räknarens *ANS-funktion* och med *ekvationslösaren*. Man kan säga att den del som man kommer till när man trycker på y [FINANCE] är en verkstad som är *special-designad* för att lösa problem som innehåller variabler som nuvarande värde, framtida värde, ränta, kapitaliseringsperiod för räntan (år, månad...) och tid. Ekvationerna ligger nu “gömda“ i räknaren.

På det utrymme som finns i denna handledning kan vi bara ta upp några av de många funktioner som finns under “finansknappen“. Du kan läsa mer i Handboken.

Du och din familj vill köpa ett sommarhus som kostar 400 000 kr. Ni kan högst ha en kostnad för lånet på 3 500 kr per månad. Vilken räntesats gör att ni kan avbetala ett lån på 400 000 kr på 20 år? Vi ska inte i beräkningarna ta hänsyn till det skatteavdrag man kan göra på ränteutgifter. Sådana beräkningar görs efter kalkyleringen av den “uthärdliga“ räntan.

Till att börja med ser vi till att ställa in räknaren så att bara 2 decimaler visas. Då visas alla resultat av beräkningar som kronor och ören. Det blir lite lättare att läsa då.

För att komma år räknarens finansiella funktioner trycker ni y [FINANCE]. Då kommer följande meny upp:

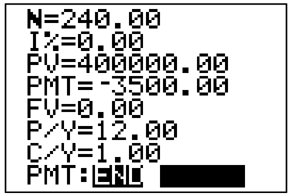


Pilen vid alternativ 7 visar att det finns fler funktioner. Det finns faktiskt 9 st till.

Vi ska nu använda alternativ 1 `TVM Solver`, en *ekvationslösare* för ekonomiska beräkningar, där variablerna som vi arbetar med är

antalet betalningsperioder	*N*
räntesats (årlig)	*I*
nuvarande värde	*PV*
betalningsbelopp	*PMT*
framtida värde	*FV*

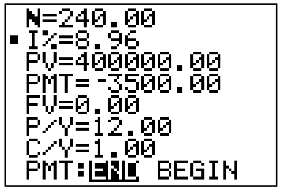
Idén med ekvationslösaren är att man ska fylla i fyra variabler för att beräkna den femte. På skärmbilden nedan har vi fyllt i värden för de variabler vi känner till i våt problem.

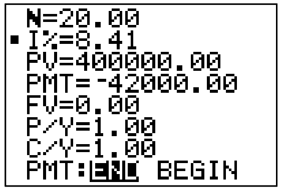


Förklaringar:

- `N` är antalet betalningsperioder. Skriv in 20*12. Räknaren räknar ut resultatet när ni trycker på Õ.
- `I` är räntesatsen. Det är ju den vi ska räkna ut så vi går vidare och låter 0 stå kvar.
- `PV` är nuvarande värde (på lånet). Fyll i 400 000.
- PMT är betalningsbelopp varje period. Fyll i – 3 500. Observera att vi måste ha ett *minustecknet*. Det står för ett utflöde (*cash outflow*).
- FV är framtida värde (på *lånet*). Fyll i 0.
- Längst ner ska man också fylla i `P/Y` som betyder antalet betalningsperioder per år. Fyll i 12.
  `C/Y` är antalet kapitaliseringar per år. Fyll i 1 där också. Banken räknar med 8 % ränta på årsbasis. 1 % månadsränta är inte samma sak som 12 % årsränta.
- Till slut ska ni fylla i om inbetalning ska ske i början eller slutet av varje år. Fyll i END.

Vi placerar markören vid rad 2 (I%) och trycker sedan på
É [SOLVE]. Se skärmbilden till vänster nedan. Resultatet blir att den uthärdliga räntesatsen är 8,96 %.
Vi antar nu att man istället betalar *en gång per år* istället. Hur stor kan då räntan vara? Vi fyller i vår tabell. 3 500 kr per månad blir istället 42 000 kr per år och antalet betalningsperioder blir 20. Fyll också i P/Y till 1. Resultatet blir

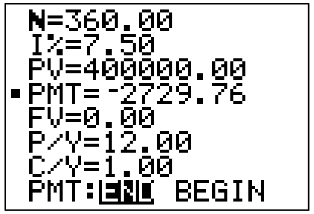




Vi ser att räntesatsen blir något lägre, 8,41 %. Å andra sidan kan man anta att man får lite ränta om man är sparsam och varje månad sätter undan pengar. Om vi *antar* att man får 1 000 kr i ränta på de pengar man sätter undan och använder dessa pengar att avbetala lånet med, dvs man betalar 43 000 kr i slutet av varje år, får vi 8,74 %. Pröva gärna.

Ränteläget blir bättre och man får nu stället ett 30-årigt lån till 7,5 % ränta. Samma sommarhus, 400 000 kr kostar det fortfarande. Hur stort *månatligt* belopp ska man då betala?

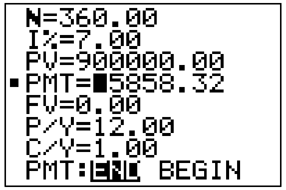
Ekvationslösaren ger svaret:



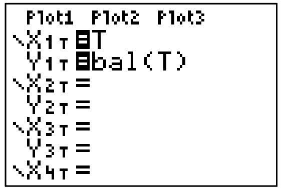
Nu ska vi göra en “balansräkning“ för ett lån som löper på 30 år.

Du ska köpa ett hus som finansieras med ett 30-årigt lån med 7,0 % ränta. Huset kostar 900 000 kr. Hur mycket ska du betala för lånet per månad. Gör sedan en balansräkning för ditt lån månad för månad.

Först räknar vi ut hur mycket vi ska betala per månad. Se skärmbilden till vänster nedan.



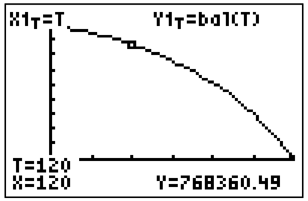
Ställ in räknaren på ritning av kurvor i *parameterform*. I menyn skriver du in följande:

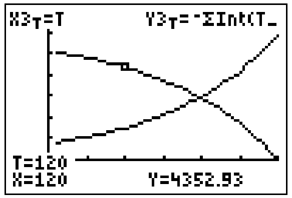


Funktionen `Bal`, som du kopierar in från finansmenyn, beräknar balansen för en amorteringsplan och använder de värden som är lagrade i variablerna I%, PV och PMT.

Ställ nu in räknarens fönster enligt följande: `Tmin =0`, `Tmax = 360`, `Tstep = 12`, `Xmin = -60`, `Xmax = 360`, `Xscl = 60`, `Ymin = –200000`, `Ymax = 1000000` och `Yscl = 100000`.

Tryck sedan på `s`. Se vänstra skärmbilden nedan.





Med funktionen `r` kan vi nu följa balansen, dvs återstående skuld, år för år. Observera att tidsaxeln är indelad i betalningsperioder och att vi går 12 steg framåt, dvs 1 år, när vi trycker på ~. Efter 120 perioder, dvs 10 år, är den återstående skulden 768360,49 kr.
Den högra skärmbilden visar två funktioner, `_Prn` resp `_Int`. Dessa kurvor visar hur amorteringsdel, resp räntedel ökar resp sjunker under hela lånetiden. Summan är hela tiden konstant, 5858,32 kr.